

Szczególna teoria względności

Krzysztof Golec-Biernat

IFJ PAN i Uniwersytet Rzeszowski

(6 czerwca 2023)

Wersja robocza nie do dystrybucji

Kraków/Rzeszów

2015-21

Spis treści

1	Transformacja Lorentza	5
1.1	Szczególna teoria względności	5
1.2	Metoda radarowa	6
1.3	Relatywistyczny efekt Dopplera	8
1.4	Transformacja Lorentza	9
1.5	Składanie transformacji Lorentza	12
2	Wnioski z transformacji Lorentza	15
2.1	Względność równoczesności	15
2.2	Dylatacja czasu	17
2.3	Skrócenie długości	19
2.4	Skrócenie długości raz jeszcze	20
2.5	Dylatacja i kontrakcja na diagramach	21
3	Czasoprzestrzeń Minkowskiego	24
3.1	Interwał czasoprzestrzenny	24
3.2	Relacje pomiędzy zdarzeniami	25
3.3	Podział transformacji Lorentza	27
3.4	Właściwa transformacja Lorentza	29
3.5	Odbicia	31
3.6	Czterowektory	32
4	Prędkość w STW	34
4.1	Transformacja prędkości	34
4.2	Aberracja świetlna	36

<i>SPIS TREŚCI</i>	4
4.3 Zapis wektorowy transformacji prędkości	37
4.4 Czterowektor prędkości	38
5 Energia i pęd	40
5.1 Definicja	40
5.2 Cząstki bezmasowe	42
5.3 Zasada zachowania energii-pędu	45
5.4 Rozpraszanie Comptona	46
5.5 Fabryka promieni gamma	49
A Light in medium	50
B Zadania	54

Rozdział 1

Transformacja Lorentza

1.1 Szczególna teoria względności

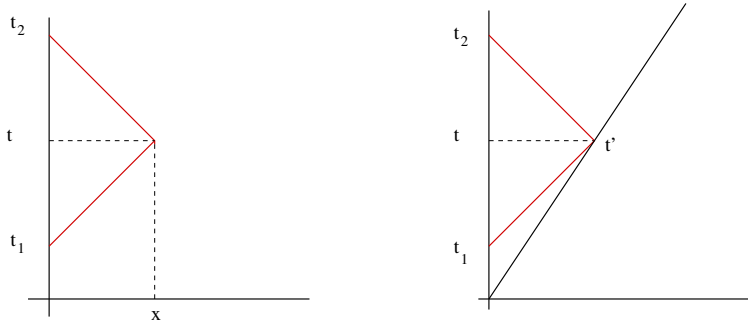
Szczególna teoria względności jest teorią relacji pomiędzy czasem i przestrzenią, które w sposób naturalny wynikają z dwóch fundamentalnych założeń.

- Zasada względności Galileusza jest słuszna w odniesieniu do zjawisk elektromagnetycznych. Innymi słowy, przy pomocy zjawisk elektromagnetycznych nie można wyróżnić żadnego inercjalnego układu odniesienia.
- Prędkość światła c jest taka sama dla wszystkich obserwatorów inercjalnych i jest niezależna od ruchu źródła. Jest to uniwersalna (niezależna od inercjalnego układu odniesienia) prędkość w STW.

Opierając się na tych postulatach można wyprowadzić nowe w stosunku do transformacji Galileusza relacje pomiędzy pomiarami czasu i przestrzeni.

Dodajmy, że zasada względności Galileusza została w toku rozwoju fizyki rozszerzona na wszystkie zjawiska fizyczne poza grawitacją. W tym ostatnim przypadku szczególna teoria względności została rozszerzona do ogólnej teorii względności, w której inercjalne układy odniesienia tracą wyróżnioną rolę na rzecz dowolnych (odwracalnych) transformacji czasu i przestrzeni.

Zbadajmy jakie są konsekwencje założeń szczególnej teorii względności.



Rys. 1.1: Metoda radarowa rekonstrukcji współrzędnych zdarzenia. Czas t na osi pionowej powinien być pomnożony przez uniwersalną prędkość c , by otrzymać współrzędną o wymiarze długości na tej osi. Podobnie dla osi t' .

1.2 Metoda radarowa

Dla uproszczenia rozważań rozważmy ruchy jednostajne wzdłuż osi x danego układu inercyjnego, powiązanego z obserwatorem S pozostającym w spoczynku w początku układu. Oznacza to, że jego współrzędna w układzie inercyjnym to $x = 0$, niezależnie od czasu t mierzonego przez zegar pozostający razem z nim w spoczynku w tym punkcie. Na Rys. 1.1, pionowa oś ct to linia świata obserwatora inercyjnego S . Czerwone linie na tych rysunkach to linie świata sygnałów świetlnych. Przecinają one oś ct po kątem 45° , gdyż mają one równania, odpowiednio,

$$ct = x + ct_1 \qquad ct = -x + ct_2 \qquad (1.1)$$

Niech obserwator S wysła sygnał świetlny w chwili t_1 w kierunku dodatnim osi x . Sygnał ten ulega odbiciu od zwierciadła, powracając do obserwatora S w chwili t_2 - patrz Rys. 1.1 (po lewej). Obserwator S stwierdzi, iż odbicie sygnału nastąpiło w chwili t takiej, że czas *tam* i czas *z powrotem* są sobie równe

$$t - t_1 = t_2 - t. \qquad (1.2)$$

Innymi słowy uzna, że odbicie jest *równoczesne* z chwilą

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}, \qquad (1.3)$$

wskazywaną przez jego zegar własny. Uzna on, że odległość x w jakiej nastąpiło odbicie jest równe połowie czasu *tam* i *z powrotem* pomnożone-

go przez prędkość światła c ,

$$x = c \frac{t_2 - t_1}{2} > 0 \quad (1.4)$$

Wyliczając t_1 oraz t_2 jako funkcję zmiennych (t, x) otrzymujemy

$$t_1 = t - \frac{x}{c}, \quad t_2 = t + \frac{x}{c}. \quad (1.5)$$

Rozważmy drugiego obserwatora inercjalnego S' , oddalającego się od S ze stałą prędkością wzdłuż osi x - patrz Rys. 1.1 (po prawej). Zakładamy, że obserwatorzy dysponują identycznymi zegarami *zsynchronizowanymi* w taki sposób, że w chwili ich spotkania

$$t = t' = 0. \quad (1.6)$$

Wprowadziliśmy w ten sposób nowe oznaczenie czasu t' dla obserwatora S' , dopuszczając możliwość przypisania *temu samemu zdarzeniu* różnych wartości czasu przez obu obserwatorów. Jeżeli obserwator S wie, że sygnał odbił się od poruszającego się względem niego obserwatora S' to przypisze temu obserwatorowi wartość bezwzględną prędkości

$$V = \frac{x}{t} \quad (1.7)$$

Wtedy równania (1.5) przyjmą postać

$$t_1 = t(1 - \beta), \quad t_2 = t(1 + \beta). \quad (1.8)$$

gdzie

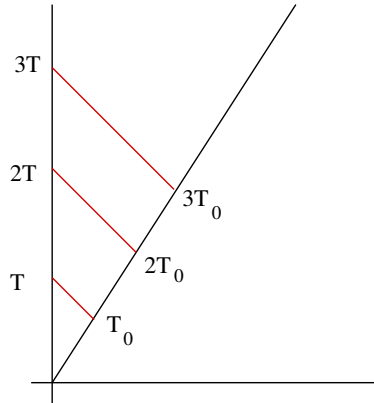
$$\beta = \frac{V}{c}. \quad (1.9)$$

Jaką chwilę t' zarejestruje S' w momencie odbicia sygnału świetlnego? Posłużymy się następującym rozumowaniem, wspartym Rys. 1.1 po prawej stronie. Odstęp czasu t' w układzie S' pomiędzy minięciem się obserwatorów a odbiciem sygnału, jest proporcjonalny do odstępu czasu t_1 w układzie S pomiędzy minięciem się obserwatorów, a chwilą wysłania sygnału

$$t' = \alpha(\vec{V}) t_1, \quad (1.10)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności α zależy od prędkości \vec{V} . Podobnie, z perspektywy obserwatora S czas odebrania powracającego sygnału t_2 jest proporcjonalny do czasu jego wysłania t' przez obserwatora S' ,

$$t_2 = \alpha(-\vec{V}) t'. \quad (1.11)$$



Rys. 1.2: Ilustracja relatywistycznego efektu Dopplera.

Odbicie sygnału przez obserwatora S' jest bowiem tożsame z jego *wysłaniem* w kierunku obserwatora S . Zasada względności prowadzi do wniosku, że współczynnik proporcjonalności α jest w obu relacjach **taki sam** i zależy tylko od modułu względnej prędkości obserwatorów,

$$\alpha = \alpha(|\vec{V}|). \quad (1.12)$$

W przeciwnym przypadku, któryś z obserwatorów inercjalnych byłby wyróżniony. Eliminując z obu relacji t' , otrzymujemy

$$t_2 = \alpha^2 t_1. \quad (1.13)$$

Podstawienie relacji (1.8) pozwala wyliczyć

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \quad (1.14)$$

1.3 Relatywistyczny efekt Dopplera

Rozważmy w układzie S' zjawisko okresowe polegające na emisji promieni świetlnych z okresem T_0 , przykładowo w chwilach - patrz Rys. 1.2,

$$t' = T_0, 2T_0, 3T_0, \dots \quad (1.15)$$

Obserwator S odbiera je w następujących chwilach mierzonych przez jego zegar

$$t = T, 2T, 3T, \dots \quad (1.16)$$

Zgodnie ze wzorem (1.11), związek między okresami tego zjawiska jest dany relacją

$$T = \alpha T_0 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} T_0. \quad (1.17)$$

Stąd, ze wzoru na długość fali, $\lambda = cT$, otrzymujemy wzór na przesunięcie Dopplera

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda_0. \quad (1.18)$$

Długość fali elektromagnetycznej emitowanej przez źródło oddalające się od obserwatora S ulega zwiększeniu ("przesunięciu ku czerwieni"), gdyż $\lambda > \lambda_0$.

Dla zbliżającego się źródła mamy

$$T_0 = \alpha T \quad (1.19)$$

skąd wynika wzór

$$T = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} T_0 \quad (1.20)$$

oraz

$$\lambda = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \lambda_0. \quad (1.21)$$

Otrzymujemy *zmniejszenie długości fali mierzonej przez obserwatora S* ("przesunięcie do nadfioletu"), gdyż $\lambda < \lambda_0$.

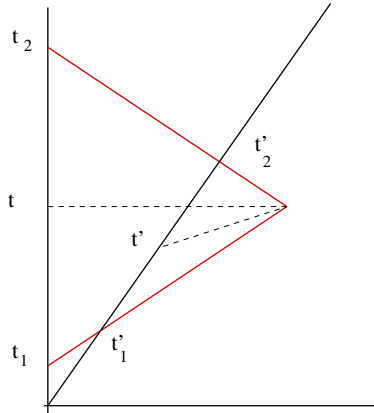
1.4 Transformacja Lorentza

Rozważmy raz jeszcze odbicie sygnału świetlnego, tym razem w dowolnym miejscu, z punktu widzenia dwóch obserwatorów inercjalnych S i S' oddalających się od siebie z prędkością V .

Obserwator S wysyła promień świetlny w chwili t_1 , a następnie odbiera go po odbiciu w chwili t_2 , przypisując zdarzeniu odbicia współrzędne (t, x) , powiązane z czasami emisji i odbioru sygnału wzorami (1.5), patrz Rys. 1.3,

$$t_1 = t - \frac{x}{c}, \quad t_2 = t + \frac{x}{c} \quad (1.22)$$

Analogicznie, obserwator S' przypisze temu samemu zdarzeniu swoje współrzędne (t', x') , rejestrując chwilę t'_1 minięcia go przez promień świetlny



Rys. 1.3: Ilustracja rozumowania prowadzącego do transformacji Lorentza.

wysłany przez S jako swoją chwilę początkową oraz chwilę t'_2 powrotu sygnału, gdzie

$$t'_1 = t' - \frac{x'}{c}, \quad t'_2 = t' + \frac{x'}{c} \quad (1.23)$$

Naszym celem jest znalezienie związku pomiędzy przypisanymi zdarzeniu współrzędnymi. Z relacji (1.10) i (1.11) wynika

$$t'_1 = \alpha t_1, \quad t'_2 = \alpha t_2 \quad (1.24)$$

czyli

$$t' - \frac{x'}{c} = \alpha \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad t + \frac{x}{c} = \alpha \left(t' + \frac{x'}{c} \right). \quad (1.25)$$

W ten sposób otrzymujemy układ równań

$$\begin{aligned} t' - x'/c &= \alpha(t - x/c) \\ t' + x'/c &= \frac{1}{\alpha}(t + x/c). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Mnożąc stronami równania (1.26) znajdujemy niezmienniczy interwał

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2. \quad (1.27)$$

Możemy go potraktować jako *niedodatnio* określony kwadrat odległość pomiędzy dwoma zdarzeniami, w tym przypadku między minięciem się obserwatorów a odbiciem sygnału. Po rozszerzeniu do trzech wymiarów przestrzennych, pełni on podstawową rolę w geometrycznym sformułowaniu szczególnej teorii względności. Więcej na ten temat powiemy w Rozdziale 3.

Dodając i odejmując stronami równania (1.26), otrzymujemy

$$\begin{aligned} t' &= \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) t - \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{x}{c} \\ \frac{x'}{c} &= \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{x}{c} - \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) t. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Podstawiając relację (1.14), znajdujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) &= \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

gdzie $\beta = V/c$, co prowadzi do wzorów na *transformację Lorentza*,

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.30)$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.31)$$

Transformację Lorentza należy uzupełnić o prawo transformacyjne dla współrzędnych przestrzennych w kierunkach prostopadłych do kierunku ruchu. W omawianej konfiguracji, gdy prędkość układu S' jest skierowana wzdłuż osi x układu S i osie obu układów są do siebie równoległe, mamy

$$y' = y \quad (1.32)$$

$$z' = z \quad (1.33)$$

Transformację odwrotną otrzymujemy zamieniając $V \rightarrow -V$,

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.34)$$

$$z = \frac{z' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.35)$$

Zwróćmy uwagę, że ze względu na czynnik w mianowniku, prędkość inercjalnego układu odniesienia musi być zawsze mniejsza niż c ,

$$V < c \quad (1.36)$$

1.5 Składanie transformacji Lorentza

Transformację Lorentza (1.30)-(1.33) dla ruchu wzdłuż osi x można zapisać w formie macierzowej

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

gdzie $\beta = V/c$ jest parametrem transformacji Lorentza, natomiast

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (1.38)$$

to czynnik Lorentza. Transformacja odwrotna to

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Wprowadźmy **pośpieszność** (rapidity) ψ jako parametr transformacji Lorentza wzdłuż osi x , powiązany z parametrem β wzorami

$$\begin{aligned} \cosh \psi &\equiv \frac{e^\psi + e^{-\psi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \sinh \psi &\equiv \frac{e^\psi - e^{-\psi}}{2} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

gdzie wzór odwrotny to

$$\beta = \frac{\sinh \psi}{\cosh \psi} \equiv \operatorname{tgh} \psi \quad (1.41)$$

Transformacja Lorentza (1.37) przyjmuje teraz postać

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi & 0 & 0 \\ -\sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Wykonajmy dwie transformacje Lorentza wzdłuż osi x z pośpiesznościami ψ_1 i ψ_2 , którym odpowiadają przejścia pomiędzy układami inercjalnymi

$$S \xrightarrow{V_1} S' \xrightarrow{V_2} S'' \quad (1.43)$$

gdzie V_1 to prędkość układu S' względem S , natomiast V_2 to prędkość układu S'' względem S' .

Przejście od układu S do układu S'' odpowiada transformacji

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi_2 & -\sinh \psi_2 & 0 & 0 \\ -\sinh \psi_2 & \cosh \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \psi_1 & -\sinh \psi_1 & 0 & 0 \\ -\sinh \psi_1 & \cosh \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Mnożąc macierze i wykorzystując tożsamości

$$\cosh(\psi_1 + \psi_2) = \cosh \psi_1 \cosh \psi_2 + \sinh \psi_1 \sinh \psi_2 \quad (1.44)$$

$$\sinh(\psi_1 + \psi_2) = \sinh \psi_1 \cosh \psi_2 + \cosh \psi_1 \sinh \psi_2 \quad (1.45)$$

znajdujemy

$$\begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\psi_1 + \psi_2) & -\sinh(\psi_1 + \psi_2) & 0 & 0 \\ -\sinh(\psi_1 + \psi_2) & \cosh(\psi_1 + \psi_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

Otrzymaliśmy więc nową transformację Lorentza wzdłuż osi x z pośpieszności Y będącą sumą pośpieszności

$$\psi = \psi_1 + \psi_2. \quad (1.47)$$

Dodawania pośpieszności odpowiada składaniu odpowiadających im prędkości układów inercjalnych. Wzór dla wypadkowej prędkości wyprowadzimy korzystając z tożsamości

$$\operatorname{tgh}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{\operatorname{tgh} \psi_1 + \operatorname{tgh} \psi_2}{1 + \operatorname{tgh} \psi_1 \operatorname{tgh} \psi_2} \quad (1.48)$$

Podstawiając relację (1.41), otrzymujemy

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (1.49)$$

skąd dostajemy wzór na relatywistyczne składanie prędkości

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2 / c^2} \quad (1.50)$$

gdzie V to prędkość układu S'' względem układu S .

Prędkość wypadkowa V nigdy nie przekroczy prędkości światła c , gdyż

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} < 1 \quad (1.51)$$

Rzeczywiście, powyższy warunek jest równoważny warunkowi

$$(1 - \beta_1)(1 - \beta_2) > 0, \quad (1.52)$$

który jest spełniony dla $0 \leq \beta_{1,2} < 1$. Ograniczenie $V < c$ na prędkość inercjalnych układów odniesienia jest więc zachowane przy składaniu ich prędkości

Zauważmy, że dla małych prędkości, $V_1, V_2 \ll c$, wyrażenie w mianowniku (1.50) można zaniedbać w stosunku do jedynki co prowadzi do nierelatywistycznego dodawania prędkości wynikającego z transformacji Galileusza

$$V = V_1 + V_2 \quad (1.53)$$

Złożenie dwóch transformacji Lorentza względem tej samej osi jest transformacją Lorentza wzdłuż tej osi. Wykonując jednak dwie transformacje Lorentza wzdłuż różnych kierunków nie otrzymamy czystej transformacji Lorentza wzdłuż wypadkowego kierunku, gdyż musimy ją jeszcze poprawić o dodatkowy obrót osi wypadkowego układu bez transformacji czasu. Ten efekt jest podstawą tzw. precesji Thomasa.

Rozdział 2

Wnioski z transformacji Lorentza

2.1 Względność równoczesności

Rozważmy dwa zdarzenia A i B , które w układzie S zachodzą w tym samym czasie t , ale w różnych położeniach przestrzennych $x_1 \neq x_2$. Są więc one *równoczesne* w tym układzie, a ich współrzędne czasoprzestrzenne to

$$A = (t, x_1), \quad B = (t, x_2). \quad (2.1)$$

Zgodnie ze wzorem (1.30), w układzie S' zdarzenia te mają współrzędne czasoprzestrzenne,

$$A = (t'_1, x'_1), \quad B = (t'_2, x'_2). \quad (2.2)$$

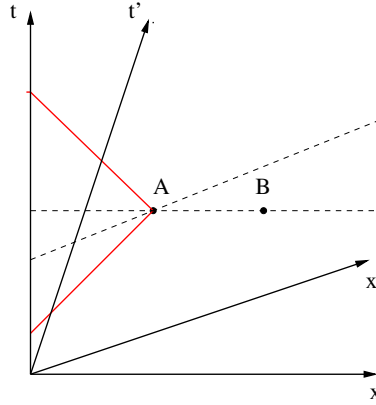
gdzie chwile czasowe

$$t'_1 = \frac{t_1 - x_1 V/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t_2 - x_2 V/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.3)$$

Stąd odstęp czasu w układzie S' pomiędzy tymi zdarzeniami to

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = \frac{V(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \neq 0. \quad (2.4)$$

Dwa zdarzenia rozdzielone przestrzennie i równoczesne w układzie S , są nierównoczesne w układzie S' . Oznacza to, że równoczesność zdarzeń jest



Rys. 2.1: Zdarzenia równoczesne ze zdarzeniem A (linie przerywane) w układach S i S' . Osie t' oraz x' pokazują efekt transformacji Lorentza. Wartości liczbowe na osiach czasowych są dodatkowo pomnożone przez c .

pojęciem względnym w STW, gdyż zależy od inercjalnego układu odniesienia.

Na Rys. 2.1, linie przerywane pokazują zdarzenia równoczesnych ze zdarzeniem $A = (t_1, x_1)$ w układzie S (prosta równoległa do osi x), dla których

$$t = t_1 \quad (2.5)$$

oraz w układzie S' (prosta nachylona do osi x), dla których

$$t' = t'_1 \quad (2.6)$$

Ostatnia prosta jest równoległa do prostej odpowiadającej zdarzeniom równoczesnym w układzie S' z czasem $t' = 0$, która opowiada osi x' układu S' . Kładąc $t' = 0$ w równaniu (1.30), otrzymujemy równanie tej prostej

$$ct = \frac{V}{c}x \quad (2.7)$$

Kąt nachylenia ϕ osi x' do osi x układu S jest dany przez warunek

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{ct}{x} = \frac{V}{c} = \beta \quad (2.8)$$

Podobnie otrzymamy równanie drugiej prostej, odpowiadającej osi czasowej t' układu S' . Kładąc $x' = 0$ w równaniu (1.31) dostajemy

$$x = Vt \quad (2.9)$$

Kąt nachylenia tej prostej do osi t układu S to ten sam kat ϕ , gdyż

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{x}{ct} = \frac{V}{c} = \beta \quad (2.10)$$

Geometrycznie transformacja Lorentza polega na skróceniu osi czasowej i przestrzennej o ten sam kat ϕ w kierunku linii świata sygnału świetlnego $x = ct$. Dla $V \rightarrow c$ obie osie dążą do tej linii świata.

Podsumowując nasz rozważania:

Równoczesność zdarzeń jest pojęciem względnym, gdyż zależy od inercyjnego układu odniesienia.

2.2 Dylatacja czasu

Rozważmy dwa zdarzenia zachodzące w układzie S' w tym samym punkcie x' , ale w różnych chwilach czasu t'_1 and t'_2 . Odstęp czasu między nimi wynosi

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 \quad (2.11)$$

Obserwator inercyjny S , względem którego S' porusza się z prędkością v w dodatnim kierunku osi x stwierdzi, że zdarzenia te zachodzą w chwilach czasu, t_1 i t_2 , związanych z t'_1 i t'_2 transformacją Lorentza

$$t_1 = \frac{t'_1 + \beta x'/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \beta x'/c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.12)$$

W związku z tym odstęp czasu w układzie S to

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.13)$$

i stąd relacja między odstępami czasu określanymi przez obu obserwatorów

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} > \Delta t' \quad (2.14)$$

Obserwator S zmierzy dłuższy odstęp czasu niż obserwator S' .

Przyjmijmy jako podsumowanie:

Z punktu widzenia danego obserwatora inercjalnego, procesy czasowe zachodzące w układach inercjalnych poruszających się względem niego ulegają zwolnieniu.

Odstęp czasu $\Delta t'$ mierzony przez obserwatora S' nazywamy czasem własnym. Jest on niezmiennikiem transformacji Lorentza, gdyż niezmienniczy jest kwadrat odległości pomiędzy dwoma zdarzeniami zachodzącymi w tym samym punkcie zwykłej przestrzeni,

$$s_{12}^2 = c^2(\Delta t')^2 \quad (2.15)$$

i stąd

$$\Delta t' = \frac{\sqrt{s_{12}^2}}{c} \quad (2.16)$$

jest stosunkiem dwóch niezmienników transformacji Lorentza.

Zjawisko dylatacji czasu wyjaśnia fakt obserwacji mionów na powierzchni Ziemi wytwarzanych przez zderzenia szybkich cząstek pochodzenia kosmicznego z atomami w górnych warstwach atmosfery. Średni czas życia mionu mierzony w laboratorium dla mionów w spoczynku wynosi $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s. Po średnio takim czasie miony rozpadają się tworząc m. in. elektrony. Gdyby nie istniała dylatacja czasu mogłyby one przebyć drogę

$$L \approx c\tau = (3 \cdot 10^8) \times (2.2 \cdot 10^{-6}) \text{ m} = 6.6 \cdot 10^2 \text{ m} = 660 \text{ m} \quad (2.17)$$

gdzie założyliśmy, że miony poruszają się z prędkością zbliżoną do prędkości światła. Tymczasem miony są obserwowane na powierzchni Ziemi w odległości $L_0 \approx 10$ km od punktu ich powstania. Z punktu widzenia obserwatora ziemskiego szybko poruszające się miony żyją jednak dłużej o czynnik lorentzowski gamma

$$\Delta t = \gamma\tau \quad (2.18)$$

i w związku z tym mogą pokonać odległość

$$L_0 \approx c\Delta t = \gamma(c\tau) \approx 10 \text{ km} \quad (2.19)$$

Przykładowe wartości prędkości mionu i czynnika γ są podane w Zadaniu 1.

2.3 Skrócenie długości

Rozważmy pręt o długości L_0 **spoczywający** w układzie S' . Ponieważ pręt spoczywa, jego długość możemy określić podając współrzędne początku i końca w dowolnych chwilach w układzie S'

$$L_0 = x'_2 - x'_1. \quad (2.20)$$

Mierząc długości pręta w układzie S , w którym się porusza, określmy współrzędne początku i końca pręta w tej samej chwili czasu. Otrzymujemy więc zdarzenia o następujących współrzędnych

$$A = (t, x_1), \quad B = (t, x_2) \quad (2.21)$$

Długość pręta definiowana przez obserwator S to

$$L = x_2 - x_1 \quad (2.22)$$

Aby ją związać z długością L_0 obserwatora S' zauważmy, że położenia x_1 i x_2 odpowiadają w układzie S' położeniom określonym przez transformację Lorentza

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_2 &= \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Stąd

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.24)$$

co oznacza, że długość poruszającego się pręta wynosi

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (2.25)$$

Ponieważ $L < L_0$, możemy sformułować wniosek:

Długość pręta mierzona wzdłuż kierunku jego ruchu w układzie inercjalnym, w którym się porusza jest mniejsza od długości pręta w spoczynku.

Długości poprzeczne L_{\perp} do kierunku ruchu obiektu nie ulegają zmianie ze względu na prawa transformacyjne (1.32)-(1.33). Tak więc

$$L_{\perp} = L'_{\perp} \quad (2.26)$$

Powróćmy do przykładu z mionami wytwarzanymi w górnych warstwach atmosfery i obserwowanych na powierzchni Ziemi. W układzie spoczynkowym mionu, czas jego życia wynosi średnio $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s, natomiast warstwa atmosfery (będąca analogiem sztywnego pręta) o długości $L_0 \approx 10$ km, skraca się o czynnik γ . Stąd odległość do przebycia przez Ziemię wraz z atmosferą, która umożliwia rejestrację mionu w czasie jego życia wynosi

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = c\tau \approx 660 \text{ m} \quad (2.27)$$

2.4 Skrócenie długości raz jeszcze

Założenie o pomiarze długości poruszającego się pręta poprzez określenie położenia jego końców w tej samej chwili czasu nie jest konieczne. Jeżeli obserwator S zmierzy je w różnych chwilach czasu to zdarzenia odpowiadające pomiarowi to

$$A = (t_1, x_1), \quad B = (t_2, x_2) \quad (2.28)$$

Zdefiniuje on wtedy mierzoną długość pręta poprzez wzór

$$L = (x_2 - x_1) - V(t_2 - t_1) \quad (2.29)$$

W układzie S' , w którym pręt spoczywa, otrzymujemy współrzędne

$$A = (t'_1, x'_1), \quad B = (t'_2, x'_2) \quad (2.30)$$

które są powiązane ze współrzędnymi w układzie S transformacją Lorentza

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x'_1 + Vt'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} & x_2 &= \frac{x'_2 + Vt'_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t_1 &= \frac{t'_1 + Vx'_1/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} & t_2 &= \frac{t'_2 + Vx'_2/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Podstawiając te związki do (2.29), znajdujemy

$$L = \frac{(x'_2 - x'_1) + V(t'_2 - t'_1) - V(t'_2 - t'_1) - \beta^2(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.32)$$

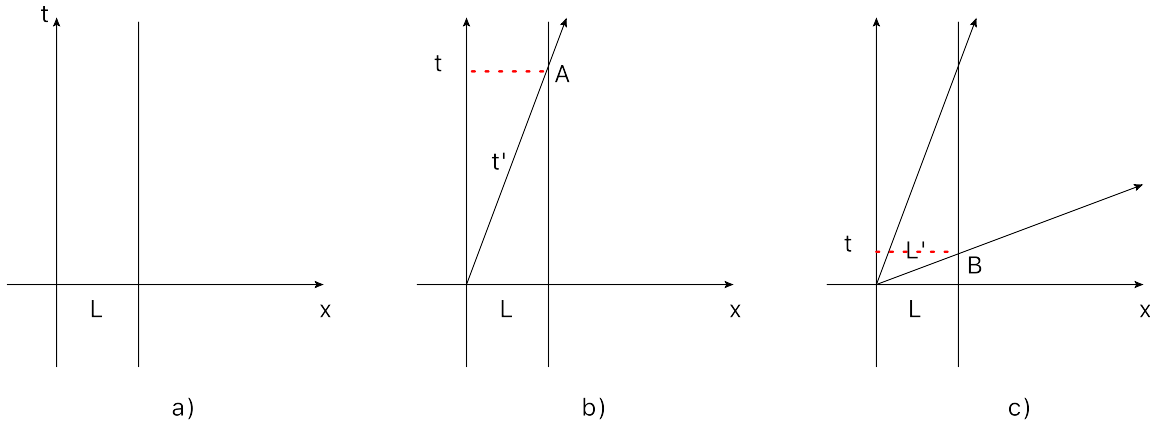
skąd otrzymujemy wzór na skrócenie Lorentza

$$L = (x'_2 - x'_1)\sqrt{1 - \beta^2} = L_0\sqrt{1 - \beta^2}, \quad (2.33)$$

gdyż obserwator S' w dalszym ciągu określi długość pręta jako

$$L_0 = x'_2 - x'_1, \quad (2.34)$$

niezależnie od chwil czasu, w których wyznacza położenia końców pręta.



Rys. 2.2: Dylatacja czasu i kontrakcja długości na diagramach Minkowskiego

2.5 Dylatacja i kontrakcja na diagramach

Wyprowadzimy dylatację czasu i kontrakcję długości posługując się przykładem z mionem powstającym w górnych warstwach atmosfery, a rejestrowanym na powierzchni Ziemi dzięki efektom relatywistycznym. W wyprowadzeniu posłużymy się diagramami czasoprzestrzennymi Minkowskiego na Rys. 2.2 oraz niezmiennikiem (1.27) transformacji Lorentza

$$c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2 \quad (2.35)$$

Dla uproszczenia notacji przyjmijmy układ jednostek, w którym $c = 1$.

Rozważmy inercjalny układ odniesienia S , w którym Ziemia spoczywa¹ i znajduje się w odległości L od jego początku. Na Rys. 2.2 a) linia świata powierzchni Ziemi to prosta równoległa do osi czasowej o współrzędnej $x = L$.

Niech w chwili $t = 0$ w punkcie $x = 0$ powstaje mion poruszający się w kierunku Ziemi ze stałą prędkością v . Linia świat mionu to półprosta

$$x = vt \quad (2.36)$$

na wykresie 2.2 b). Mion dociera do powierzchni Ziemi, co odpowiada zdarzeniu A na przecięciu linii świata mionu i Ziemi. Współrzędne tego zdarzenia w układzie S to

$$A = (t, L) \quad (2.37)$$

¹Zaniebujemy ruch Ziemi wokół własnej osi oraz Słońca przy przyjętych skalach czasowych.

gdzie t to odstęp czasu pomiędzy powstaniem mionu i jego zarejestrowaniem na powierzchni Ziemi. Aby policzyć ile wynosi ten odstęp czasu t' w układzie spoczynkowym mionu S' zauważmy, że linia świata mionu to oś czasowa układu inercyjnego S' . W tym układzie zdarzenie A ma współrzędne

$$A = (t', 0) \quad (2.38)$$

Korzystając z (2.35), otrzymujemy

$$t^2 - L^2 = t'^2 \quad (2.39)$$

gdzie $L = vt$. Podstawiając tę relację znajdujemy wzór na dylatację czasu

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (2.40)$$

Czas życia mionu t poruszającego się w układzie spoczywającej Ziemi jest dłuższy niż czas życia mionu $\tau \equiv t'$ w jego układzie spoczynkowym. Dzięki temu może być zarejestrowany na powierzchni Ziemi.

Aby wyprowadzić kontrakcję długości posłużymy się Rys. 2.2 c). Nowa półprosta na tym rysunku to oś przestrzenna x' układu spoczynkowego mionu S' , dla której $t' = 0$, patrz Rys. 2.1. Odległość w układzie S' pomiędzy powstającym mionem w początku układu współrzędnych a Ziemią jest liczona dla tej samej chwili czasu $t' = 0$ i wynosi $x' = L'$. Jest ona wyznaczona przez zdarzenie B będące punktem przecięcia osi x' z linią świata Ziemi. Stąd współrzędne tego zdarzenia w układzie S' to

$$B = (0, L') \quad (2.41)$$

W układzie S , oś x' układu S' spełnia równanie

$$t = vx \quad (2.42)$$

gdyż jest ona nachylona do osi x pod takim samym kątem pod jakim jest nachylona oś t' do osi t . Stąd współrzędne zdarzenia B w układzie S wynoszą

$$B = (vL, L) \quad (2.43)$$

Wykorzystując (2.35), otrzymujemy dla zdarzenia B

$$(vL)^2 - L^2 = -(L')^2 \quad (2.44)$$

skąd wynika wzór

$$L' = \sqrt{1 - v^2} L \quad (2.45)$$

Długość $L = L_0$ jest odległością do przebycia przez mion w układzie spoczynkowym Ziemi, natomiast L' jest tą długością widzianą przez mion w swoim układzie spoczynkowym. Stąd skrócenie Lorentza po zmianie oznaczeń,

$$L' = \sqrt{1 - v^2} L_0, \quad (2.46)$$

które umożliwia rejestrację mionu w średnim czasie jego życia.

Na koniec zauważmy następującą relację w oznaczeniach z Rys. 2.2 dla geometrii z niezmiennikiem Lorentza (2.35)

$$\frac{t'}{t} = \frac{L'}{L} = \sqrt{1 - v^2} < 1 \quad (2.47)$$

W geometrii euklidesowej, w której niezmiennik (2.35) jest dany wzorem Pitagorasa

$$c^2 t'^2 + x'^2 = c^2 t^2 + x^2 \quad (2.48)$$

relacje (2.47) miałyby przeciwny kierunek nierówności. Przykładowo, równanie (2.39) miałyby postać

$$t^2 + L^2 = t'^2, \quad (2.49)$$

dla którego po podstawieniu $L = vt$ otrzymalibyśmy

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{1 + v^2} > 1 \quad (2.50)$$

Rozdział 3

Czasoprzestrzeń Minkowskiego

3.1 Interwał czasoprzestrzenny

Czasoprzestrzeń Minkowskiego jest czterowymiarową rozmaitością zdarzeń, w której jest określony niedodatni kwadrat odległości między zdarzeniami. Wybierając inercjalny układ odniesienia S , każdemu zdarzeniu można przyporządkować współrzędne

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \quad (3.1)$$

Kwadrat odległość między zdarzeniami o współrzędnych x^μ i y^μ jest określony przez niedodatnio określony interwał

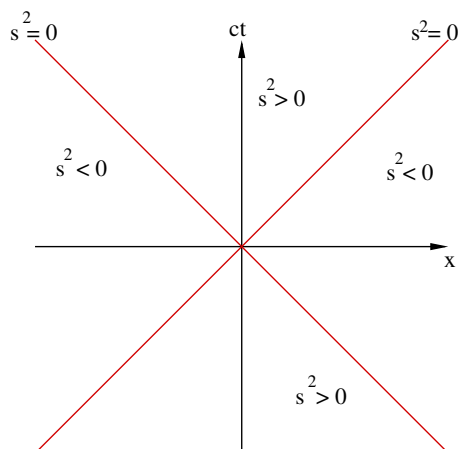
$$\Delta s^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2 \quad (3.2)$$

Rozważmy liniowe transformacje współrzędnych zdarzeń

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (3.3)$$

gdzie $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ i sumujemy po powtarzającym się dolnym i górnym wskaźniku. W zapisie macierzowym

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$



Rys. 3.1: Stożek światła punktu O będącego początkiem układu współrzędnych i podział zdarzeń względem tego punktu.

Przekształcenia Lorentza są zdefiniowane jako liniowe transformacje współrzędnych zdarzeń (3.3), które **zachowują interwał** (3.2). Tak więc w nowych współrzędnych interwał Δs^2 ma niezmienną postać

$$\Delta s^2 = (x'^0 - y'^0)^2 - (x'^1 - y'^1)^2 - (x'^2 - y'^2)^2 - (x'^3 - y'^3)^2 \quad (3.5)$$

Transformacje (1.37) są przykładem transformacji Lorentza.

3.2 Relacje pomiędzy zdarzeniami

Rozważmy dwa zdarzenia w przestrzeni Minkowskiego o współrzędnych określonych w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia

$$O = (0, 0, 0, 0), \quad P = (ct, x, y, z) \quad (3.6)$$

Wybór współrzędnych zerowych dla zdarzenia O jest wygodny dla prostoty dalszych wzorów, Odległość pomiędzy zdarzeniami O i P jest określona przez interwał

$$\Delta s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (3.7)$$

W związku z tym, że interwał (3.7) nie jest dodatnio określony, zdarzenie P jest powiązane ze zdarzeniem O jedną z trzech relacji - patrz Rys. 3.1:

- zdarzenie P leży na *stożku światła* zdarzenia O , gdy

$$\Delta s^2 = 0. \quad (3.8)$$

Zdarzenia leżące na stożku światła można połączyć sygnałem świetlnym. Podstawiając do równania (3.7) równanie sygnału świetlnego,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (3.9)$$

otrzymujemy znikający interwał

$$\Delta s^2 = c^2 t^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (3.10)$$

- zdarzenia P jest rozdzielone *czasowo* od O , gdy

$$\Delta s^2 > 0. \quad (3.11)$$

Zdarzenia rozdzielone czasowo można połączyć sygnałem o prędkości $v < c$, gdyż

$$x^2 + y^2 + z^2 = v^2 t^2 \quad (3.12)$$

i wtedy

$$\Delta s^2 = c^2 t^2 - v^2 t^2 = (c^2 - v^2) t^2 > 0 \quad (3.13)$$

Wszystkie zdarzenia wewnątrz stożka z czasem $t < 0$ tworzą **przeszłość** zdarzenia O , natomiast zdarzenia z wnętrza stożka z $t > 0$ tworzą **przyszłość** zdarzenia O . Samo zdarzenie O , zachodzące w chwili $t = 0$, jest teraźniejszością tego zdarzenia. Podział w przestrzeni Minkowskiego na przeszłość i przyszłość jest zawsze dokonywany z punktu widzenia danego zdarzenia i jest niezmienniczy względem transformacji Lorentza, która nie odwraca znaku czasu zdarzeń wewnątrz stożka. Nie istnieje więc określenie tych pojęć tak jak w czasoprzestrzeni Galileusza z uniwersalnym czasem i uniwersalną strukturą równoczesności, która pozwala określić przeszłość i przyszłość dla danej płaszczyzny zdarzeń równoczesnych.

- zdarzenia P jest rozdzielone *przestrzennie* od O , gdy

$$\Delta s^2 < 0. \quad (3.14)$$

Zdarzenia dla których zachodzi $\Delta s^2 < 0$ nie mogą być powiązane przyczynowo. Gdyby je można było połączyć sygnałem o prędkości v to

$$\Delta s^2 = (c^2 - v^2) t^2 < 0 \quad (3.15)$$

co oznacza, że $v > c$. Byłoby to sprzeczne z założeniem, że c jest maksymalną prędkością przesyłania sygnału. Można pokazać, że transformacje Lorentza mogą zmienić uporządkowanie czasowe zdarzeń na zewnątrz stożka zdarzenia O . Dlatego zdarzenia te nie wchodzą do określenia przeszłości i przyszłości tego zdarzenia.

Przedstawiony podział zdarzeń względem zdarzenia O jest niezmienniczy względem transformacji Lorentza, tzn. nie zależy od wyboru inercjalnego układu odniesienia.

Podkreślmy, że przedstawiony podział zdarzeń jest dokonany względem dowolnie wybranego zdarzenia O . Nie oznacza to, że dokonaliśmy w ten sposób absolutnego podziału czasoprzestrzeni Minkowskiego na trzy rozłączne klasy zdarzeń. Wybierając bowiem inne zdarzenie O' , względem którego określamy zdarzenia rozdzielone zerowo, czasowo lub przestrzennie, znajdziemy inne zbiory zdarzeń spełniające te warunki.

To co jest absolutne w czasoprzestrzeni Minkowskiego to relacja pomiędzy dwoma dowolnymi zdarzeniami, np.

$$P = (ct, x, y, z), \quad P' = (ct', x', y', z') \quad (3.16)$$

gdzie współrzędne są określone w dowolnie wybranym inercjalnym układzie odniesienia. Licząc interwał

$$\Delta s^2 = c^2(t - t')^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 - (z - z')^2 \quad (3.17)$$

znajdujemy odpowiedź na pytanie jaka relacja łączy te zdarzenia w zależności od otrzymanego znaku Δs^2 . Geometryczny sposób określenia relacji polega na narysowaniu stożka świetlnego jednego ze zdarzeń i określeniu czy drugie zdarzenie leży na stożku światła lub znajduje się w jego wnętrzu czy zewnątrz.

3.3 Podział transformacji Lorentza

Rozważmy dwa zdarzenia o współrzędnych x^μ i $x^\mu + dx^\mu$. Odległość między nimi to

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (3.18)$$

Wprowadzając symetryczną macierz tensora metrycznego

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

możemy zapisać

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.20)$$

Transformacja Lorentza współrzędnych (3.3) prowadzi do relacji

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha dx^\alpha, \quad (3.21)$$

Stąd, warunek niezmienniczości interwału (3.20) daje

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta dx^\alpha dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.22)$$

co prowadzi do relacji jaką musi spełniać transformacja Lorentza,

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \quad (3.23)$$

Warunek ten może być również zapisany w postaci macierzowej

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (3.24)$$

gdzie Λ^T to macierz transponowana macierzy Λ .

Tak określony zbiór transformacji Lorentza tworzy grupę z działaniem polegającym na mnożeniu macierzy transformacji, gdyż dla dowolnych dwóch transformacji Lorentza Λ_1 i Λ_2 zachodzi

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T \Lambda_1^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2 \eta \Lambda_2 = \eta \quad (3.25)$$

skąd wynika, że $\Lambda_1 \Lambda_2$ jest transformacją Lorentza. Elementem neutralnym jest macierz jednostkowa, natomiast elementem odwrotnym do macierzy Λ jest macierz odwrotna Λ^{-1} . Istnienie takiej macierzy wynika z faktu, że $\det(\Lambda) \neq 0$. Rzeczywiście licząc wyznacznik obu stron wzoru (3.24), dostajemy

$$(-1)(\det \Lambda)^2 = -1 \quad (3.26)$$

skąd wynika, że

$$\det \Lambda = 1 \quad \text{lub} \quad \det \Lambda = -1. \quad (3.27)$$

Rozważmy warunek (3.23) dla $\alpha = \beta = 0$

$$\eta_{00} = 1 = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 - (\Lambda^2_0)^2 - (\Lambda^3_0)^2 \quad (3.28)$$

i stąd

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + (\Lambda^1_0)^2 + (\Lambda^2_0)^2 + (\Lambda^3_0)^2 > 0 \quad (3.29)$$

Mamy więc transformacje Lorentza, dla których

$$\Lambda^0_0 > 0 \quad \text{lub} \quad \Lambda^0_0 < 0. \quad (3.30)$$

W zależności od znaków $\det \Lambda$ oraz Λ^0_0 rozróżniamy cztery rodzaje transformacje Lorentza wymienione w poniższej tabelce.

Transformacja Lorentza	$\text{sgn}(\Lambda^0_0)$	$\det(\Lambda)$
właściwa ortochroniczna	+	+
odbicie przestrzenne	+	-
odbicie czasowe	-	-
odbicie czasowe i przestrzenne	-	+

Tablica 3.1: Podział transformacji Lorentza w zależności od znaku Λ^0_0 oraz wyznacznika macierzy Λ .

3.4 Właściwa transformacja Lorentza

Właściwa ortochroniczna transformacja Lorentza dla dowolnie skierowanej prędkości

$$\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3) \quad (3.31)$$

ma postać

$$\Lambda^\mu_\nu(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V_i/c \\ -\gamma V_i/c & \delta_{ij} + (\gamma - 1) \frac{V_i V_j}{\mathbf{V}^2} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

gdzie $i = 1, 2, 3$, a czynnik Lorentza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{V}^2/c^2}}. \quad (3.33)$$

W jawnej postaci otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V_1/c & -\gamma V_2/c & -\gamma V_3/c \\ -\gamma V_1/c & 1 + \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\gamma V_2/c & \Omega_{21} & 1 + \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ -\gamma V_3/c & \Omega_{31} & \Omega_{32} & 1 + \Omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie dla $i, j = 1, 2, 3$

$$\Omega_{ij} = (\gamma - 1) \frac{V_i V_j}{\mathbf{V}^2} \quad (3.35)$$

Traktując współrzędne przestrzenne zdarzenia jako składowe wektorów

$$\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3), \quad \mathbf{r}' = (x'^1, x'^2, x'^3) \quad (3.36)$$

w tej samej trójwymiarowej przestrzeni wektorowej, do której należy także wektor prędkości \mathbf{V} , możemy powyższe wzory zapisać w zwartej postaci

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \gamma \mathbf{V} t + \frac{\gamma - 1}{\mathbf{V}^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Rozłóżmy następnie wektor \mathbf{r} na składowe równoległe i prostopadłe do prędkości \mathbf{V} ,

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}}{\mathbf{V}^2}, \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}, \quad \mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.38)$$

i podobnie dla wektora \mathbf{r}'

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}}{\mathbf{V}^2}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_{\parallel}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.39)$$

Transformację Lorentza (3.37) można więc zapisać w postaci

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{\mathbf{r}_{\parallel} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) \\ \mathbf{r}'_{\parallel} &= \gamma (\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{V} t) \\ \mathbf{r}'_{\perp} &= \mathbf{r}_{\perp} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Transformację odwrotną otrzymujemy poprzez zamianę $\mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V}$

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{\mathbf{r}'_{\parallel} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right) \\ \mathbf{r}_{\parallel} &= \gamma (\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{V} t') \\ \mathbf{r}_{\perp} &= \mathbf{r}'_{\perp} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Transformacja (3.37) jest czystym pchnięciem (boostem) lorentzowskim. Można ją uzupełnić o obrót w przestrzeni położeń, co odpowiada zmianie kierunków osi inercjalnego układu współrzędnych. Dla takiej transformacji zachodzi

$$t' = t, \quad x'^k = O_l^k x^l \quad (3.42)$$

gdzie O_l^k jest macierzą obrotu należącą do grupy $SO(3)$, ortogonalnych macierzy 3×3 o wyznaczniku równym 1,

$$O^T O = O O^T = 1, \quad \det O = 1 \quad (3.43)$$

Obroty zachowują odległość euklidesową pomiędzy punktami przestrzeni trójwymiarowej $P = (x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \text{inv} \quad (3.44)$$

Ponieważ $dt = 0$ to interwał lorentzowski ds^2 jest zachowany przez obroty. Spełniają więc one warunek definicyjny transformacji Lorentza.

Grupa obrotów jest ciągłą grupą trójparametrową (np. trzy kąty Eulera). Dodając trzy składowe prędkości znajdujemy, że właściwa ortochroniczna transformacja Lorentza jest grupą **sześcioparametrową**.

3.5 Odbicia

Odbicie przestrzenne jest realizowane przez transformację Lorentza

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

co daje w notacji wektorowej $\mathbf{r} = (x, y, z)$

$$t' = t, \quad \mathbf{r}' = -\mathbf{r} \quad (3.46)$$

Odbicie czasowe to transformacja

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

co daje

$$t' = -t, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} \quad (3.48)$$

Natomiast odbicie czasowe i przestrzenne to

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

co oznacza, że

$$t' = -t, \quad \mathbf{r}' = -\mathbf{r} \quad (3.50)$$

3.6 Czterowektory

Układ czterech liczb zadanych w danym inercjalnym układzie odniesienia S ,

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3), \quad (3.51)$$

który transformuje się przy przejściu do dowolnego innego inercjalnego układu odniesienia S' przy pomocy transformacji Lorentza,

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \quad (3.52)$$

gdzie

$$A'^\mu = (A'^0, A'^1, A'^2, A'^3), \quad (3.53)$$

to współrzędne w nowym układzie odniesienia, reprezentuje czterowektor A w przestrzeni Minkowskiego.

Przestrzeń Minkowskiego jest tu rozumiana jako czterowymiarowa przestrzeń liniowa z formą kwadratową η zadaną przez tensor Minkowskiego $\eta_{\mu\nu}$. Niedodatnio określona długość czterowektora A to

$$A^2 = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \quad (3.54)$$

Może więc zachodzić: $A > 0$, $A^2 = 0$ lub $A^2 < 0$. Mówimy wtedy o czterowektorach odpowiednio czasopodobnych, zerowych lub przestrzennopodobnych.

Zbiór czterowektorów tworzy strukturę przestrzeni liniowej. Można je więc dodawać i mnożyć przez dowolną liczbą rzeczywistą. Innymi słowy, jeśli A i B są czterowektorami to ich kombinacje liniowe $aA + bB$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, też są czterowektorami. Zapisując ten warunek przy pomocy współrzędnych, zachodzi przy zmianie inercjalnego układu odniesienia

$$aA'^\mu + bB'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu (aA^\nu + bB^\nu) \quad (3.55)$$

Z liniowości formy kwadratowej η , dla dowolnych czterowektorów A, B, C zachodzi

$$\eta(aA + bB, C) = a\eta(A, C) + b\eta(B, C) \quad (3.56)$$

lub zapisując przy pomocy składowych czterowektorów w układzie S

$$\eta_{\mu\nu} (aA^\mu + bB^\mu) C^\nu = a\eta_{\mu\nu} A^\mu C^\nu + b\eta_{\mu\nu} B^\mu C^\nu \quad (3.57)$$

Identyczna relacja obowiązuje dla składowych w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia.

Wielkość	Prawo transformacyjne
wektor	$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$
pseudowektor I	$A'^{\mu} = \text{sgn}(\Lambda^0_0) \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$
pseudowektor II	$A'^{\mu} = \text{sgn}(\Lambda^0_0) \det(\Lambda) \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$
pseudowektor III	$A'^{\mu} = \det(\Lambda) \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$

Tablica 3.2: Cztery rodzaje czterowektorów

Wektor położenia \overrightarrow{OP} zdarzenia P w układzie odniesienia S o współrzędnych w tym układzie $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ jest czterowektorem, gdyż transformują się one zgodnie ze wzorem (3.52) przy zmianie inercjalnego układu odniesienia. W następnych rozdziałach podamy przykład dwóch innych czterowektorów: prędkości oraz energii-pędu.

Ze względu na różne własności transformacyjne przy odbiciach czasowych i przestrzennych, istnieją cztery rodzaje czterowektorów. W tabelce podajemy ich prawa transformacyjne przy **dowolnych** transformacjach Lorentza.

Rozdział 4

Prędkość w STW

4.1 Transformacja prędkości

Rozważmy ruch ciała w układzie S' z chwilową prędkością

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad (4.1)$$

wzdłuż osi x' . Korzystając z praw transformacji Lorentza (1.34)-(1.35) dla różniczek współrzędnych,

$$dt = \frac{dt' + V dx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (4.2)$$

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (4.3)$$

otrzymujemy wartość prędkości ciała wzdłuż osi x w układzie S ,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + V dx'/c^2}. \quad (4.4)$$

Dzieląc licznik i mianownik przez dt' i przechodząc do granicy $dt' \rightarrow 0$ znajdujemy prawo transformacyjne chwilowych prędkości podłużnych,

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (4.5)$$

gdzie relacja odwrotna to

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}. \quad (4.6)$$

Wzór (4.5) otrzymaliśmy w rozdziale 1.5 dla składania prędkości inercjalnych układów odniesienia, wzór (1.50). Tutaj jest on jednak prawem transformacyjnym chwilowej prędkości poruszającego się obiektu.

W szczególności możemy podstawić $v'_x = c$ dla prędkości promienia świetlnego w układzie S' , znajdując taką samą prędkość w układzie S

$$v_x = \frac{c+V}{1+V/c} = c \quad (4.7)$$

W granicy gdy prędkość ciała w układzie S' oraz prędkość tego układu są małe, $v'_x, V \ll c$, wzór (4.4) przechodzi w prawo dodawania prędkości wynikające z transformacji Galileusza,

$$v_x = v'_x + V. \quad (4.8)$$

Niech cząstka porusza się tak, że zmienia się również jej współrzędna poprzeczna y' w układzie S' . Wtedy prędkość cząstki w tym kierunku to

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'}. \quad (4.9)$$

Wymiary poprzeczne do kierunku względnego ruchu układów inercjalnych nie ulegają zmianie, $dy = dy'$. Stąd otrzymujemy

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt' + dx'V/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (4.10)$$

Dzieląc licznik i mianownik przez dt' i przechodząc do granicy $dt' \rightarrow 0$ otrzymujemy prawo transformacji prędkości poprzecznych

$$v_y = \frac{v'_y}{1 + v'_x V/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (4.11)$$

Wzór odwrotny powstaje poprzez zamianę prędkości układu $V \rightarrow -V$,

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (4.12)$$

Identyczny wzory obowiązują dla składowej z -owej prędkości,

$$v_z = \frac{v'_z}{1 + v'_x V/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (4.13)$$

oraz

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (4.14)$$

Jeżeli $v'_x = 0$ to dla składowych poprzecznych prędkości $\mathbf{v}_\perp = (v_y, v_z)$ otrzymujemy

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}'_\perp \sqrt{1 - V^2/c^2} \quad (4.15)$$

Czynnik z pierwiastkiem wynika z dylatacji czasu, $dt = \gamma dt'$.

4.2 Aberracja świetlna

Niech inercjalny układ S będzie związany ze spoczywającym w nim Słońcem, natomiast inercjalny układ S' będzie związany z Ziemią poruszającą się z prędkością V względem Słońca.

Niech w układzie S widać gwiazdę pod kątem θ odniesionym do horyzontu (osi x układu S). Promień świetlny porusza się w stronę obserwatora w punkcie $x = 0$ i ma następujące składowe prędkości

$$\begin{aligned} v_x &= -c \cos \theta \\ v_y &= -c \sin \theta \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

W układzie S' składowe te wynoszą

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - V_x V/c^2} = -\frac{c \cos \theta + V}{1 + \beta \cos \theta} \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - V_x V/c^2)} = -\frac{c \sin \theta}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)} \\ v'_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

gdzie $\beta = V/c$. Obserwator w układzie S' w punkcie $x' = 0$ obserwuje gwiazdę pod kątem θ' takim, że

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta + \beta)} \quad (4.18)$$

Zjawisko zmiany kąta obserwacji promienia świetlnego ze względu na ruch obserwatora nazywamy aberracją świetlną.

Dla ruchów ultrarelatywistycznych $\beta \rightarrow 1$ oraz $1/\gamma = \sqrt{1 - \beta^2} \rightarrow 0$ i kąt $\theta' \rightarrow 0$. W ogólności

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta + \beta)} < \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta \quad (4.19)$$

i stąd zawsze zachodzi

$$\theta' < \theta \quad (4.20)$$

4.3 Zapis wektorowy transformacji prędkości

Różniczkując wzory (3.41), otrzymujemy

$$dt = \gamma \left(dt' + \frac{d\mathbf{r}'_{\parallel} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \right), \quad d\mathbf{r}_{\parallel} = \gamma (d\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{V} dt') \quad (4.21)$$

oraz

$$d\mathbf{r}_{\perp} = d\mathbf{r}'_{\perp} \quad (4.22)$$

Składowe równoległa i prostopadła wektorów $d\mathbf{r}$ i $d\mathbf{r}'$

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{\parallel} + d\mathbf{r}_{\perp}, \quad d\mathbf{r}' = d\mathbf{r}'_{\parallel} + d\mathbf{r}'_{\perp} \quad (4.23)$$

są zdefiniowane względem kierunku prędkości względnej układów \mathbf{V} ,

$$d\mathbf{r}_{\parallel} = \frac{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}}{\mathbf{V}^2} \mathbf{V}, \quad d\mathbf{r}_{\perp} = d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_{\parallel} \quad (4.24)$$

oraz

$$d\mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V}}{\mathbf{V}^2} \mathbf{V}, \quad d\mathbf{r}'_{\perp} = d\mathbf{r}' - d\mathbf{r}'_{\parallel} \quad (4.25)$$

Łatwo sprawdzić, że transformacja Lorentza (4.21) jest zgodna z warunkami

$$d\mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{V} = d\mathbf{r}'_{\perp} \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.26)$$

oraz

$$d\mathbf{r}_{\parallel} \cdot d\mathbf{r}_{\perp} = d\mathbf{r}'_{\parallel} \cdot d\mathbf{r}'_{\perp} = 0 \quad (4.27)$$

w tym sensie, że spełnienie ich w jednym układzie odniesienia implikuje spełnienie w drugim układzie odniesienia.

Składowe równoległa i prostopadła prędkości dowolnego ciała jest zdefiniowana poprzez równania

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{d\mathbf{r}_{\parallel}}{dt}, \quad \mathbf{v}_{\perp} = \frac{d\mathbf{r}_{\perp}}{dt} \quad (4.28)$$

Stąd otrzymujemy

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{d\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{V} dt'}{dt' + d\mathbf{r}'_{\parallel} \cdot \mathbf{V}/c^2} = \frac{\mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{V}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2} \quad (4.29)$$

oraz

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{d\mathbf{r}'_{\perp}}{\gamma(dt' + d\mathbf{r}'_{\parallel} \cdot \mathbf{V}/c^2)} = \frac{\mathbf{v}'_{\perp}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2} \sqrt{1 - \mathbf{V}^2/c^2}, \quad (4.30)$$

gdzie w obu równaniach wykorzystaliśmy wzór

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{v}'_{\parallel} \cdot \mathbf{V} \quad (4.31)$$

4.4 Czterowektor prędkości

Rozważmy cząstkę, która w każdej chwili czasu porusza się z prędkością $v < c$. W krótkiej chwili czasu dt w układzie S prędkość chwilowa \mathbf{v} poruszającej się cząstki jest stała. Można wtedy wprowadzić układ inercjalny S' , w którym cząstka chwilowo spoczywa. Odstęp czasu własnego $d\tau$, powiązany z odstępem czasu dt wzorem (2.14),

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}, \quad (4.32)$$

gdzie $d\tau$ jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

Możemy więc zdefiniować wektor prędkości chwilowej cząstki

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (4.33)$$

gdzie $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$ to wektor różniczek współrzędnych cząstki w układzie S . Udowodnimy, że składowe u^μ transformują się tak jak współrzędne czterowektora położenia - tworzą więc **czterowektor**. Jeżeli współrzędne cząstki w układzie S transformują się zgodnie z transformacją Lorentza (3.3) przy zmianie inercjalnego układu odniesienia,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (4.34)$$

to takie samo prawo jest słuszne dla różniczek współrzędnych

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu. \quad (4.35)$$

Dzieląc obie strony powyższej równości przez niezmiennik $d\tau$, otrzymujemy prawo transformacyjne składowych czteropędności

$$u'^\mu = \Lambda^\mu_\nu u^\nu. \quad (4.36)$$

Prędkość (4.33) jest więc czterowektorem w przestrzeni Minkowskiego.

Tak więc, składowe czteropędności to

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right). \quad (4.37)$$

Kwadrat wektora czteropędności, liczony w metryce Minkowskiego, wynosi

$$u^2 = \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{c^2 - \mathbf{v}^2}{1 - \mathbf{v}^2/c^2} = c^2 > 0. \quad (4.38)$$

Jest to więc czterowektor czasopodobny.

Dla cząstek poruszających się z prędkością c , np. fotonów, zachodzi wzdłuż ich trajektorii

$$dx_\mu dx^\mu = 0. \quad (4.39)$$

Stąd kwadrat czterowektora prędkości wnosi zero

$$u^2 = \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0, \quad (4.40)$$

gdzie λ jest parametrem afinicznym ewolucji trajektorii: $x^\mu = x^\mu(\lambda)$. Jest on określony z dokładnością do transformacji zachowującej warunek $u^2 = 0$,

$$\lambda' = a\lambda + b. \quad (4.41)$$

Rozdział 5

Energia i pęd

5.1 Definicja

Energia i pęd cząstki masowej o masie m w szczególnej teorii względności tworzą czterowektor o składowych

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad (5.1)$$

proporcjonalnych do składowych czterowektora prędkości (4.37)

$$p^\mu = m u^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right). \quad (5.2)$$

Aby p^μ było czterowektorem musimy założyć, że masa ciała m jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

Stąd wzory na energię i pęd cząstki

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}. \quad (5.4)$$

Kwadrat długości czterowektora energii-pędu p^μ to

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2. \quad (5.5)$$

Wzór ten można zapisać w często używanej formie

$$E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4. \quad (5.6)$$

Wyciągając pierwiastek, otrzymujemy

$$E = \pm \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4}. \quad (5.7)$$

Całkowita energia może więc być dodatnia i ujemna. W teorii klasycznej (niekwantowej) odrzucamy możliwość występowania ujemnej energii. Nie można tego zrobić w relatywistycznej teorii kwantowej, co prowadzi do konieczności wprowadzenia antycząstki dla każdej cząstki.

Rozważmy granicę małych prędkości dla relatywistycznej energii i pędu. Zachowując co najwyżej człony kwadratowe w (\mathbf{v}/c) we wzorach (5.3) i (5.4), znajdujemy

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (5.8)$$

$$\mathbf{p} \simeq m \mathbf{v}. \quad (5.9)$$

Nowym elementem w stosunku do teorii nierelatywistycznej jest nieusuwalna energia spoczynkowa ciała

$$E_0 = mc^2 \quad (5.10)$$

Masa ciała jest więc określona przez jego energię spoczynkową. Tym samym całkowita energia to

$$E = mc^2 + E_k \quad (5.11)$$

gdzie

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} - mc^2 \quad (5.12)$$

to energia kinetyczna, równa zero dla $\mathbf{v} = 0$.

W teorii relatywistycznej nie obowiązuje prawo zachowania masy. Rozważmy bowiem dwa ciała o tej samej masie m w układzie odniesienia, w którym całkowity pęd ciał wynosi zero. Oznacza to, że mają one przeciwnie skierowane prędkości. Niech po zderzeniu powstaje nowe ciało o masie M , pozostające w spoczynku w zgodzie z zasadą zachowania pędu. Załóżmy, że nie nastąpiła zmiana stanu wewnętrznego ciał tak, że obowiązuje zasada zachowania energii w formie

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = Mc^2 \quad (5.13)$$

Energia spoczynkowa nowego ciała jest więc sumą energii spoczynkowych ciał przed zderzeniem, powiększoną o ich energię kinetyczną $2E_k$ przed zderzeniem. Innymi słowy, masa nowego ciała to

$$M = m + m + \frac{2E_k}{c^2} \quad (5.14)$$

Masa nowego ciała M została więc powiększona o wkład od energii kinetycznej zderzających się ciał.

W ogólności należy uwzględnić każdy rodzaj energii do wkładu do masy ciała. Na przykład, energia spoczynkowa jądra o masie M to suma energii spoczynkowych nukleonów (Z protonów o masie m_p i $(A-Z)$ neutronów i masie m_n), pomniejszona o energię wiązania $E_w = E_w(A, Z) > 0$,

$$Mc^2 = Z m_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 - E_w \quad (5.15)$$

co definiuje tzw. deficyt masy jądra

$$\Delta M = Z m_p + (A - Z) m_n - M = \frac{E_w}{c^2} \quad (5.16)$$

5.2 Cząstki bezmasowe

Geometryczny charakter energii i pędu w szczególnej teorii względności wyraża się poprzez założenie, że tworzą one czterowektor

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) \quad (5.17)$$

którego składowe transformują się przy zmianie inercjalnego układu odniesienia poprzez transformację Lorentza

$$p^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu'} p^\nu \quad (5.18)$$

Kwadrat czterowektora energii-pędu

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \quad (5.19)$$

jest niezmiennikiem transformacji Lorentza i w ogólności może spełniać trzy warunki: $p^2 > 0$, $p^2 = 0$ oraz $p^2 < 0$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek $p^2 > 0$. Istnieje wtedy układ inercjalny S , w którym czterowektor energii-pędu ma następującą postać¹

$$p^\mu = (E_0/c, \mathbf{0}) \quad (5.20)$$

gdzie E_0 to energia w tym układzie. Wykonując transformację Lorentza (3.32) do układu S' poruszającego się względem S z prędkością $-\mathbf{v}$

$$\Lambda^\mu_{\nu'} \equiv \Lambda^\mu_{\nu}(-\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v_i/c \\ \gamma v_i/c & \delta_{ij} + (\gamma - 1) \frac{v_i v_j}{v^2} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

¹Dowód tego faktu pozostawiamy czytelnikowi.

gdzie $i = 1, 2, 3$, a γ to czynnik Lorentza, otrzymujemy następujące składowe czterowektora energii-pędu w nowym układzie

$$p^{\mu'} \equiv (E/c, \mathbf{p}) = (\gamma E_0/c, \gamma E_0 \mathbf{v}/c^2) \quad (5.22)$$

Stąd relacje

$$E = \gamma E_0, \quad \mathbf{p} = \gamma \frac{E_0 \mathbf{v}}{c^2} \quad (5.23)$$

Dla małych prędkości $|\mathbf{v}| \ll c$, otrzymujemy

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = 1 + \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} + \dots \quad (5.24)$$

Tak więc, z dokładnością do członów kwadratowych w prędkości dostajemy dla pędu

$$\mathbf{p} = \gamma \frac{E_0 \mathbf{v}}{c^2} \approx \frac{E_0}{c^2} \mathbf{v} \quad (5.25)$$

Zakładając, że w najniższym rzędzie względem stosunku \mathbf{v}/c , wzór relatywistyczny przechodzi w relację nierelatywistyczną $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, dostajemy

$$\frac{E_0}{c^2} = m \quad (5.26)$$

gdzie m to masa bezwładna cząstki. Stąd ostatecznie

$$E = \gamma mc^2, \quad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} \quad (5.27)$$

to energia i pęd cząstki poruszającej się z prędkością \mathbf{v} . W układzie S , w którym cząstka spoczywa, posiada ona energię spoczynkową

$$E_0 = mc^2 \quad (5.28)$$

natomiast pęd $\mathbf{p} = 0$ w zgodzie ze wzorem nierelatywistycznym. Istnienie energii spoczynkowej cząstki E_0 jest więc konsekwencją geometrycznego charakteru energii i pędu w szczególnej teorii względności. Zauważmy, że masa bezwładna cząstki jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, gdyż

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 > 0 \quad (5.29)$$

Szczególne teorie względności dopuszczają cząstki bezmasowe z $m = 0$, dla których $p^2 = 0$. Wtedy energia i pęd powiązane są zależnością

$$E = c|\mathbf{p}| \quad (5.30)$$

i w każdym inercjalnym układzie odniesienia czteropęd energii-pędu to

$$p^\mu = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p}) \quad (5.31)$$

gdzie \mathbf{p} jest pędem w rozważanym układzie inercjalnym. Wynika to z warunku zerowej masy,

$$E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = E'^2 - c^2 \mathbf{p}'^2 = 0, \quad (5.32)$$

słusznym w każdym układzie inercjalnym, w tym przypadku S i S' .

Cząstki bezmasowe poruszają się z prędkością c . Ze wzorów (5.27) otrzymujemy bowiem

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E} c^2 \quad (5.33)$$

Wzór ten jest niezależny od masy cząstki, możemy więc przyjąć, iż jest słuszny także dla cząstek bezmasowych. Stąd z relacji (5.30), $|\mathbf{v}| = c$.

Dla cząstek bezmasowych \mathbf{p} jest niezależną charakterystyką kinematyczną cząstki, niezależną od jej stałej prędkości c . Jak zrozumieć tę cechę? Odpowiedź tkwi w teorii kwantowej takich cząstek. Wynika z niej, że kwanty pola elektromagnetycznego to bezmasowe fotony, których energia i pęd są powiązane relacją Einsteina

$$|\mathbf{p}| = \frac{h}{\lambda}, \quad E = h\nu \quad (5.34)$$

gdzie h to stała Plancka, natomiast λ i ν to długość i częstość fali elektromagnetycznej, która po skwantowaniu prowadzi do kwantowych cząstek - fotonów. Z relacji dyspersyjnej dla fali elektromagnetycznej

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (5.35)$$

wynika relacja (5.30) dla fotonów. Dowolna wartość pędu fotonów jest więc konsekwencją relacji $|\mathbf{p}| = h/\lambda$, w której długości fali elektromagnetycznej może przyjmować dowolną dodatnią wartość.

Rozpatrzmy na koniec przypadek $p^2 < 0$. Nie jest on wykluczony przez szczególną teorię względności. Odpowiadające mu hipotetyczne cząstki zostały nazwane tachionami. W tym przypadku

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 < 0 \quad (5.36)$$

co prowadzi do relacji $E < c|\mathbf{p}|$. Ze wzoru (5.30) wynika, że prędkość tachionów $|\mathbf{v}| > c$. Stwarza to trudności interpretacyjne, gdyż takie cząstki mogłyby naruszyć relację przyczynowości przy założeniu, że przenoszą informację. Tym niemniej, można skonstruować teorię kwantową dla nich i badać konsekwencje fizyczne takiej teorii dla obserwacji fizycznych.

5.3 Zasada zachowania energii-pędu

Warunek by E i \mathbf{p} tworzyły czterowektor (przyjmujemy $c = 1$) jest niezbędny do tego by spełniona była zasada względności w odniesieniu do zasady zachowania energii i pędu.

Równość składowych dwóch czterowektorów energii-pędu,

$$p_{in}^\mu = p_{out}^\mu, \quad (5.37)$$

w inercjalnym układzie odniesienia S oznacza zasadę zachowania energii i pędu w tym układzie, gdyż z definicji (5.1) wynika równość ich składowych

$$E_{in} = E_{out}, \quad \mathbf{p}_{in} = \mathbf{p}_{out} \quad (5.38)$$

Wykonując transformację Lorentza do układu inercjalnego S' ,

$$p'_{in}{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p_{in}^\nu, \quad p'_{out}{}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p_{out}^\nu \quad (5.39)$$

dostajemy równość nowych składowych czterowektorów energii-pędu

$$p'_{in}{}^\mu = p'_{out}{}^\mu \quad (5.40)$$

co oznacza zasadę zachowania energii i pędu w układzie S'

$$E'_{in} = E'_{out}, \quad \mathbf{p}'_{in} = \mathbf{p}'_{out} \quad (5.41)$$

W zderzeniach cząstek, energia E_{in} jest sumą energii cząstek wchodzących do reakcji, a \mathbf{p}_{in} jest wektorową sumą ich pędów. Podobnie dla cząstek będących produktem reakcji. Wzór (5.38) wyraża zatem zachowanie całkowitej energii oraz całkowitego pędu cząstek w rozważanej reakcji

$$E_{in} = \sum_{k=1}^{N_k} E_{in}^{(k)} = \sum_{l=1}^{N_l} E_{out}^{(l)} = E_{out} \quad (5.42)$$

$$\mathbf{p}_{in} = \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{p}_{in}^{(k)} = \sum_{m=1}^{N_l} \mathbf{p}_{out}^{(m)} = \mathbf{p}_{out} \quad (5.43)$$

gdzie wskaźniki k, l identyfikują cząstki. Zauważmy, że kwadrat długości (interwału) wektorów energii-pędu

$$M^2 = p_{in}^2 = p_{out}^2 \quad (5.44)$$

jest zachowany w reakcji co oznacza, że

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(\sum_{k=1}^{N_k} E_{in}^{(k)} \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{p}_{in}^{(k)} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{l=1}^{N_l} E_{out}^{(l)} \right)^2 - \left(\sum_{l=1}^{N_l} \mathbf{p}_{out}^{(l)} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.45)$$

jest niezmiennikiem reakcji. Dlatego M^2 nazywamy *masą niezmienniczą* układu zderzających się cząstek.

5.4 Rozpraszanie Comptona

Przedstawimy przykład zastosowania zasady zachowania energii-pędu rozważając **rozpraszanie Comptona** fotonu na elektronie,

$$\gamma + e \rightarrow \gamma' + e' \quad (5.46)$$

W rozważaniach przyjmijmy układ jednostek, w którym $c = 1$.

Rozważmy układ inercjalny S , w którym elektron spoczywa. Jego czteropęd to

$$p_{in}^\mu = (m_e, 0, 0, 0) \quad (5.47)$$

Foton γ porusza się w tym układzie wzdłuż dodatniego kierunku osi x . Jego czteropęd to

$$q_{in}^\mu = (E_{in}, E_{in}, 0, 0) \quad (5.48)$$

gdzie E_γ to energia fotonu, natomiast długość pędu fotonu w przyjętych jednostkach spełnia równanie $|\mathbf{q}| = E_\gamma$.

Foton ulega rozproszeniu pod kątem θ w stosunku do dodatniego kierunku osi x . Rozważmy sytuację, gdy foton po rozproszeniu porusza się kierunku przeciwnym niż foton padający, tzn. wzdłuż ujemnego kierunku osi x (gdy $\theta = \pi$). Jego czteropęd to

$$q_{out}^\mu = (E_{out}, -E_{out}, 0, 0) \quad (5.49)$$

Spoczywający elektron ulega wtedy odrzutowi w kierunku dodatnim osi x i jego czteropęd to

$$p_{out}^\mu = (\gamma m_e, \gamma m_e v, 0, 0) \quad (5.50)$$

gdzie γ to czynnik Lorentza powiązany z prędkością v odrzuconego elektronu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (5.51)$$

Aby znaleźć zależność między energiami padającego i rozproszonego fotonu wykorzystajmy zasadę zachowania energii-pędu

$$q_{in}^\mu + p_{in}^\mu = q_{out}^\mu + p_{out}^\mu \quad (5.52)$$

W rozważanym układzie odniesienia S daje to dla składowej zerowej czteropędu relację

$$E_{in} + m_e = E_{out} + \gamma m_e \quad (5.53)$$

natomiast dla składowej pędu wzdłuż osi x ,

$$E_{in} = -E_{out} + \gamma m_e v \quad (5.54)$$

Wyliczając kwadrat prędkości z powyższego równania dostajemy

$$v^2 = \frac{(E_{in} + E_{out})^2}{m_e^2 + (E_{in} + E_{out})^2} \quad (5.55)$$

Stąd czynnik

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-v^2} = \frac{m_e^2 + (E_{in} + E_{out})^2}{m_e^2} \quad (5.56)$$

Podnosząc równanie (5.53) do kwadratu,

$$(E_{in} - E_{out} + m_e)^2 = m_e^2 \gamma^2 \quad (5.57)$$

i podstawiając czynnik γ^2 dostajemy

$$(E_{in} - E_{out} + m_e)^2 = m_e^2 + (E_{in} + E_{out})^2 \quad (5.58)$$

Stąd otrzymujemy zależność pomiędzy energią fotonu padającego E_{in} i energią fotonu rozproszonego do tyłu E_{out} :

$$E_{out} = \frac{E_{in}}{1 + 2E_{in}/m_e} \quad (5.59)$$

Zauważmy, że

$$E_{out} < E_{in} \quad (5.60)$$

gdyż część energii padającego fotonu jest zamieniona na energię kinetyczną elektronu po rozproszeniu. W przypadku, gdy energia padającego fotonu jest znacznie mniejsza niż energia spoczynkowa elektronu, $m_e \approx 0.5 \text{ MeV}$,

$$E_{in} \ll m_e \quad (5.61)$$

otrzymujemy

$$E_{out} \approx E_{in} \quad (5.62)$$

Rozważmy jeszcze raz ten proces w układzie S' , w którym elektron porusza się w kierunku ujemnym osi x z prędkością V . W tym celu wykonajmy transformację Lorentza wzdłuż dodatniego kierunku osi x z parametrem V . Dla czteropędu elektronu przed rozproszeniem p_{in}^μ dostajemy

$$\begin{pmatrix} \gamma_V & -\gamma_V V \\ -\gamma_V V & \gamma_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\gamma_V \\ -m\gamma_V V \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

gdzie

$$\gamma_V = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \quad (5.64)$$

natomiast składowe y i z czteropędu pozostają równe zeru. Jak należało oczekiwać, elektron porusza się w ujemnym kierunku osi x .

Podobnie, dla czteropędu padającego fotonu q_{in}^μ dostajemy

$$\begin{pmatrix} E'_{in} \\ E'_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_V & -\gamma_V V \\ -\gamma_V V & \gamma_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{in} \\ E_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_V(1-V)E_{in} \\ \gamma_V(1-V)E_{in} \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

natomiast dla fotonu rozproszonego o czteropędzie q_{out}^μ mamy

$$\begin{pmatrix} E'_{out} \\ -E'_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_V & -\gamma_V V \\ -\gamma_V V & \gamma_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{out} \\ -E_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_V(1+V)E_{out} \\ -\gamma_V(1+V)E_{out} \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

Foton wciąż porusza się w kierunku ujemnym osi x nowego układu.

Porównując energie fotonów rozproszonego i padającego otrzymujemy

$$\frac{E'_{out}}{E'_{in}} = \frac{\gamma_V(1+V)E_{out}}{\gamma_V(1-V)E_{in}} = \left(\frac{1+V}{1-V} \right) \frac{E_{out}}{E_{in}} \quad (5.67)$$

Dla relatywistycznych prędkości elektronu, gdy $V \rightarrow 1$, energia rozproszonego fotonu jest dużo większa niż energia fotonu padającego

$$E'_{out} \gg E'_{in} \quad (5.68)$$

Rozproszony foton uzyskuje energię dużo większą niż energia fotonu padającego kosztem utraty energii relatywistycznego elektronu. Przypadek ten nazywa się *odwrotnym rozpraszaniem Comptona*.

5.5 Fabryka promieni gamma

Odwrotny proces Comptona jest podstawą pomysłu na skonstruowanie *Fabryki promieni gamma* (Gamma factory), która pozwala otrzymać bardzo gęstą wiązkę fotonów o energiach w zakresie promieniowania gamma do 1 GeV.

Zastąpmy elektron przez ciężki jon o masie $M \sim 100 \text{ GeV}$, wielokrotnie większej niż masa nukleonu $m_N \approx 1 \text{ GeV}$. Ciężki jon jest zjonizowanym układem atomowym, gdyż zachowuje co najmniej jeden elektron z nim związany. Niech padający foton ma w układzie spoczywającego jonu niewielką energię,

$$E_{in} \ll M \quad (5.69)$$

która wzbudza jon przenosząc elektron do wyższego stanu atomowego, po czym tak wzbudzony jon wypromieniowuje foton przechodząc do niższego stanu. Energia wypromieniowanego fotonu jest równie mała jak energia fotonu wzbudzającego i zachodzi warunek (5.62),

$$E_{out} \approx E_{in} \quad (5.70)$$

W układzie, w którym jon jest przyspieszony do prędkości V skierowanej wzdłuż ujemnej osi x , energie fotonów spełniają więc warunek (5.68)

$$\frac{E'_{out}}{E'_{in}} \approx \frac{1+V}{1-V} \quad (5.71)$$

Dla prędkości relatywistycznych jonu, $V \approx 1$, gdy czynnik $\gamma_V \sim 200 - 3000$, otrzymujemy

$$\frac{E'_{out}}{E'_{in}} \approx \gamma_V^2 (1+V)^2 \approx 4\gamma_V^2 \gg 1 \quad (5.72)$$

Energia E'_{out} fotonu rozproszonego do tyłu na ciężkim jonie jest więc o wiele rzędów wielkości większa niż energia fotonu padającego E'_{in} ,

$$E'_{out} \gg E'_{in} \quad (5.73)$$

Padający foton jest dostarczony przez laser, którego wiązka fotonów oświetla z przeciwka wiązkę jonów. Otrzymana w wyniku rozproszenia do tyłu wiązka fotonów ma energię z zakresu promieniowania gamma do 1 GeV. Tak otrzymana wiązka może być użyta do badania nowych zjawisk w mikroświecie, co jest podstawowym celem badawczym *Fabryki promieniowania gamma*.

Dodatek A

Light in medium

Let us assume that the electromagnetic wave propagate in a medium in which the speed of light is given by

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} < c \quad (\text{A.1})$$

where ϵ and μ are electric permittivity and magnetic permeability of the medium while c is the speed of light in vacuum. The wave equation written for simplicity for the scalar field $\phi = \phi(t, x, y, z)$ is given by

$$\frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Let us consider the case in which ϕ does not depend on y and z when the wave equation reads

$$\frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

which can be written as

$$\left(\frac{1}{v_c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{v_c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = 0 \quad (\text{A.4})$$

The solution is given in the form of two waves moving with velocity v_c in opposite directions

$$\phi(t, x) = \phi_1(x - v_c t) + \phi_2(x + v_c t) \quad (\text{A.5})$$

Indeed, for the right moving wave

$$\left(\frac{1}{v_c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1(x - v_c t) = 0 \quad (\text{A.6})$$

while for the left moving wave

$$\left(\frac{1}{v_c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi_2(x + v_c t) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Let us rewrite (A.4) in the form

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_c \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi = 0 \quad (\text{A.8})$$

Thus, the coefficient $\pm v_c$ is the wave velocity together with its direction.

Let us perform the Lorentz transformation to the inertial frame S' which moves with the speed V along the x axis of the inertial frame S in which (A.2) is written

$$t' = \gamma \left(t - \frac{xV}{c^2}\right) \quad (\text{A.9})$$

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad (\text{A.10})$$

where

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (\text{A.11})$$

while the transverse coordinates are unchanged

$$y' = y, \quad z' = z \quad (\text{A.12})$$

We assume that ϕ is a scalar field, i.e.

$$\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu) \quad (\text{A.13})$$

Let us compute

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'}\right) \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma \left(-\frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'}\right) \quad (\text{A.15})$$

Thus, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \pm v_c \frac{\partial}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'}\right) \pm v_c \left(-\frac{V}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'}\right) \\ &= \left(1 \mp \frac{v_c V}{c^2}\right) \frac{\partial}{\partial t'} - (V \mp v_c) \frac{\partial}{\partial x'} \\ &= \left(1 \mp \frac{v_c V}{c^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} - \left(\frac{V \mp v_c}{1 \mp v_c V/c^2}\right) \frac{\partial}{\partial x'}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

and from the wave equation (A.8), we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - v_c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_c \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t'} - \left(\frac{v_c + V}{1 + v_c V / c^2} \right) \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \left(\frac{v_c - V}{1 - v_c V / c^2} \right) \frac{\partial}{\partial x'} \right) \phi' \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

We see that the wave equation for ϕ' in the frame S' is given by

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v'_+ \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + v'_- \frac{\partial}{\partial x'} \right) \phi' = 0 \quad (\text{A.18})$$

with the velocities

$$v'_+ = \frac{v_c + V}{1 + v_c V / c^2}, \quad v'_- = \frac{v_c - V}{1 - v_c V / c^2} \quad (\text{A.19})$$

which result from the relativistic law for the composition of two velocities. Thus, the solution of (A.18) is given as a superposition of two waves moving in opposite directions

$$\phi' = \phi'_1(x' - v'_- t') + \phi'_2(x' + v'_+ t') \quad (\text{A.20})$$

where ϕ'_1 is the right moving wave with velocity v'_- , while ϕ'_2 is the left moving wave with velocity v'_+ .

Let us analyze the obtained result.

- For the frame S' velocity $V = v_c$, we have

$$v'_- = 0, \quad v'_+ = \frac{2v_c}{1 + v_c^2/c^2} \quad (\text{A.21})$$

and the right moving wave velocity equals zero. Thus, the wave ϕ_1 is frozen in the frame S' :

$$\phi'_1 = \phi'_1(x') \quad (\text{A.22})$$

- For the frame S' velocity $V = -v_c$, we have

$$v'_+ = 0, \quad v'_- = \frac{2v_c}{1 + v_c^2/c^2} \quad (\text{A.23})$$

and the left moving wave velocity equals zero. Thus, the wave ϕ_2 is frozen in the frame S' :

$$\phi'_2 = \phi'_2(x') \quad (\text{A.24})$$

- If the velocity v_c of the wave in the frame S equals the universal velocity from the Lorentz transformation, $v_c = c$, then

$$v'_{\pm} = c \tag{A.25}$$

and the waves move with the same velocity in all inertial frames. It is impossible to freeze them in any inertial frame. The understanding of this basic feature of light moving in vacuum allowed Einstein to construct special theory of relativity!

Dodatek B

Zadania

1. W reakcjach jądrowych promieni kosmicznych z atomami atmosfery na wysokości 10 km wytwarzane są miony o prędkości bliskiej prędkości światła. Można je też wytworzyć w akceleratorach i zmierzyć średni czas życia $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ s (mierzony w układzie spoczynkowym cząstki). Zakładając, że prędkość mionu $v = 0.999 c$ obliczyć:
 - jaki czas z punktu widzenia obserwatora na Ziemi potrzebuje mion na dotarcie do jej powierzchni (3.34×10^{-5} s),
 - ile wynosi ten czas z punktu widzenia mionu (1.46×10^{-6} s),
 - jaką drogę może przebyć mion w średnim czasie życia gdyby nie istniał efekt dylatacji czasu (659 m),
 - jaką odległość od Ziemi widzi szybki mion na wysokości 10 km (436 m).
2. Ile wynosi energia spoczynkowa ciała o masie 1 g ? (9×10^{13} J). Na jaką wysokość można by podnieść całą ludzkość (7 mld) przy użyciu takiej energii.
3. Ile musi wynieść energia kinetyczna dwóch zderzających się protonów by móc wyprodukować 3 protony i jeden antyproton. Rozważyć ten proces w układzie, w którym jeden z protonów spoczywa oraz w układzie środka masy zderzających się protonów.

Literatura

- [1] A. Trautman, W. Kopczyński, *Czasoprzestrzeń i grawitacja*, PWN, Warszawa, 1981.
- [2] Lew D. Landau, Jewgienij M. Lifszyc, *Teoria pola*, PWN, Warszawa, 2009.