

Metody matematyczne dla fizyków

Krzysztof Golec-Biernat
Uniwersytet Rzeszowski i IFJ PAN

27 maja 2016

Spis treści

1	Prosta i płaszczyzna	5
1.1	Przestrzeń afiniczna	5
1.2	Iloczyn skalarny	6
1.3	Kąt między wektorami	6
1.4	Odległość	7
1.5	Kartezjański układ współrzędnych	8
1.6	Równanie prostej	9
1.6.1	Odległość punktu od prostej	9
1.7	Równanie płaszczyzny	10
2	Krzywe stożkowe	11
2.1	Elipsa	11
2.2	Hiperbola	13
2.3	Parabola	15
2.4	Postać biegunowa krzywych stożkowych	17
2.5	Sprowadzanie do postaci kanonicznej	19
3	Tensory	20
3.1	Krzywoliniowe układy współrzędnych	20
3.2	Popularne układy współrzędnych	22
3.3	Tensory	23
3.3.1	Różniczka i gradient	23
3.3.2	Definicja tensora	24
3.3.3	Operacja na tensorach	24
3.3.4	Niezmienniki tensorowe	25
3.4	Element długości i tensor metryczny	26
3.5	Kontrawariantny tensor metryczny	27
3.6	Element objętości	28

4	Operatory różniczkowe	30
4.1	Gradient	30
4.2	Dywergencja	31
4.3	Rotacja	31
4.4	Zapis tensorowy	33
4.5	Operatory we współrzędnych krzywoliniowych	34
4.5.1	Gradient	34
4.5.2	Dywergencja	35
4.5.3	Rotacja	35
4.5.4	Laplasjan	35
4.5.5	Laplasjan dla dowolnych współrzędnych	36
5	Twierdzenia całkowe	38
5.1	Twierdzenie o potencjale	38
5.2	Twierdzenie Stokesa	39
5.3	Twierdzenie Gaussa	41
5.4	Podsumowanie	42
6	Równania Maxwella	44
6.1	Pierwsza para	44
6.2	Druga para	46
6.3	Równanie ciągłości	47
6.4	Potencjały elektromagnetyczne	48
6.5	Transformacja cechowania	49
6.6	Podsumowanie	50
7	Równanie falowe	51
7.1	Fale elektromagnetyczne	51
7.2	Monochromatyczna fala płaska	53
7.3	Zasada superpozycji fal	54
7.4	Interferencja fal	55
8	Analiza fourierowska	56
8.1	Rozwinięcie w szereg Fouriera	56
8.2	Analiza czasowa	59
8.3	Analiza przestrzenna	61
8.4	Drgająca struna	62
8.5	Równanie falowe w pudełku	63

9	Transformata Fouriera	65
9.1	Zespolona postać szeregu Fouriera	65
9.2	Transformata Fouriera	66
9.3	Transformata Fouriera splotu funkcji	68
9.4	Delta Diraca	68
9.5	Twierdzenie Shanona o próbkowaniu	70

Rozdział 1

Prosta i płaszczyzna

1.1 Przestrzeń afiniczna

Przestrzeń afiniczna to matematyczny model przestrzeni jednorodnej, bez wyróżnionego punktu. Można w niej przesuwac punkty równolegle do zadanego kierunku. Formalna definicja jest następująca.

Przestrzeń afiniczna to trójka $(M, V, +)$, gdzie M jest dowolnym zbiorem, którego elementy nazywamy *punktami*, V jest przestrzenią wektorową, której elementy nazywamy *wektorami*, natomiast $+$ jest działaniem przesuwającym równolegle punkty zbioru M przy pomocy wektorów z przestrzeni V ,

$$(M, V) \rightarrow M, \quad \forall A \in M, \vec{v} \in V, \quad A + \vec{v} \in M \quad (1.1)$$

o własnościach

$$(A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w}) \quad (1.2)$$

$$\forall A, B \in M \exists! \vec{v} \in V; A + \vec{v} = B, \quad (1.3)$$

gdzie symbol $!$ oznacza *dokładnie jeden*. Pierwszy warunek określa składanie przesunięć mówiąc, że dwa kolejne przesunięcia są przesunięciem o wypadkowy wektor będący sumą wektorów kolejnych przesunięć. Natomiast drugi warunek mówi, że dwa dowolne punkty z M można *jednoznacznie* powiązać przesunięciem o pewien wektor. Możemy więc zdefiniować wektor zaczepiony w punkcie A o końcu w punkcie B poprzez warunek

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v}. \quad (1.4)$$

Przy pomocy takiej identyfikacji reguła składania przesunięć (1.2) wyraża prawo trójkąta dla dodawania wektorów zaczepionych

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad (1.5)$$

gdzie $\overrightarrow{AC} = \vec{v} + \vec{w}$. Zwykle sam zbiór M nazywamy przestrzenią afiniczną, pamiętając o szczegółach definicji. Wymiar przestrzeni afinicznej n jest równy wymiarowi przestrzeni wektorowej V .

1.2 Iloczyn skalarny

Jeżeli w przestrzeni wektorowej V jest wyróżniony iloczyn skalarny g to **iloczyn skalarny** wektorów $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ i $\overrightarrow{CD} = \vec{w}$ wynosi

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \equiv g(\vec{v}, \vec{w}). \quad (1.6)$$

Dla ustalonej bazy $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ w przestrzeni V iloczyn skalarny można zapisać przy pomocy współrzędnych wektorów w tej bazie

$$v = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2 + \dots + v^n \vec{e}_n, \quad w = w^1 \vec{e}_1 + w^2 \vec{e}_2 + \dots + w^n \vec{e}_n. \quad (1.7)$$

Otrzymujemy

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} v^i w^j, \quad g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j). \quad (1.8)$$

W bazie ortonormalnej $g_{ij} = \delta_{ij}$ i wtedy

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i=1}^n v^i w^i \quad (1.9)$$

1.3 Kąt między wektorami

Dla dodatnio określonego iloczynu skalarnego g można określić kąt ϕ między wektorami z relacji

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}| \cos \phi \quad (1.10)$$

gdzie ϕ jest kątem między wektorami, a $|\dots|$ oznacza długość wektora, na przykład

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})}. \quad (1.11)$$

Wzór (1.10) wyprowadzimy wychodząc z warunku dodatniej określoności iloczynu skalarnego dla wektora $\vec{v} + \lambda \vec{w}$, gdzie λ jest dowolną liczbą rzeczywistą

$$g(\vec{v} + \lambda \vec{w}, \vec{v} + \lambda \vec{w}) > 0. \quad (1.12)$$

Korzystając z własności liniowości iloczynu skalarnego, otrzymujemy

$$\lambda^2 g(\vec{w}, \vec{w}) + 2\lambda g(\vec{v}, \vec{w}) + g(\vec{v}, \vec{v}) > 0. \quad (1.13)$$

Otrzymaliśmy funkcję kwadratową w parametrze λ . Ze względu na jej dodatnią określoność, delta równania kwadratowa jest mniejsza lub równa zero,

$$\Delta = 4[g(\vec{v}, \vec{w})]^2 - 4g(\vec{w}, \vec{w})g(\vec{v}, \vec{v}) < 0. \quad (1.14)$$

Stąd

$$-1 < \frac{g(\vec{v}, \vec{w})}{\sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})}\sqrt{g(\vec{w}, \vec{w})}} < 1. \quad (1.15)$$

Ze względu na ten warunek, wyrażenie w środku jest cosinusem pewnego kąta ϕ , który nazwiemy kątem pomiędzy wektorami \vec{v} i \vec{w} ,

$$\frac{g(\vec{v}, \vec{w})}{\sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})}\sqrt{g(\vec{w}, \vec{w})}} = \cos \phi. \quad (1.16)$$

Stąd wzór (1.10) po identyfikacji $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ i $\overrightarrow{CD} = \vec{w}$.

1.4 Odległość

Odległością $|AB|$ pomiędzy punktami A i B nazywamy długość łączącego je wektora \overrightarrow{AB} ,

$$|AB| \equiv |\overrightarrow{AB}| \quad (1.17)$$

Jest ona zawsze większa lub równa zero oraz spełnione są warunki ogólnej definicji odległości

$$|AA| = 0 \quad (1.18)$$

$$|AB| = |BA| \quad (1.19)$$

$$|AC| < |AB| + |BC|. \quad (1.20)$$

Ostatni warunek to nierówność trójkąta. Wynika on w naszym przypadku z relacji (1.5) i dodatniości iloczynu skalarnego g w przestrzeni V ,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &= g(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = g(\vec{v}, \vec{v}) + g(\vec{w}, \vec{w}) + 2g(\vec{v}, \vec{w}) \\ &= g(\vec{v}, \vec{v}) + g(\vec{w}, \vec{w}) + 2\sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})}\sqrt{g(\vec{w}, \vec{w})}\cos \phi \\ &< g(\vec{v}, \vec{v}) + g(\vec{w}, \vec{w}) + 2\sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})}\sqrt{g(\vec{w}, \vec{w})} \\ &= \left(\sqrt{g(\vec{v}, \vec{v})} + \sqrt{g(\vec{w}, \vec{w})}\right)^2 = (|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|)^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.5 Kartezjański układ współrzędnych

Wprowadźmy **bazę kanoniczną** w przestrzeni afinicznej M poprzez wyróżnienie dowolnego punktu $O \in M$ oraz dowolnego układu wektorów bazowych $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ w przestrzeni wektorowej V ,

$$\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}. \quad (1.22)$$

Wyróżnienie punktu O pozwala utożsamić każdy punkt $A \in M$ z wektorem $\overrightarrow{OA} = \vec{v} \in V$, nazywanym wektorem wodzącym punktu A . Po rozłożeniu w wyróżnionej bazie,

$$\overrightarrow{OA} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + \dots + x^n \vec{e}_n, \quad (1.23)$$

otrzymujemy współrzędne dowolnego punktu A w bazie kanonicznej,

$$A \leftrightarrow (x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (1.24)$$

Baza kanoniczna pozwala więc na wprowadzenie **układu współrzędnych**, który jednoznacznie określa współrzędne dowolnego punktu przestrzeni afinicznej. Punkt O ma współrzędne $(0, 0, \dots, 0)$ i z tego powodu nazywa się go **początkiem** układu współrzędnych. Wybierając bazę ortonormalną w przestrzeni V ,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \quad \text{gdy } i \neq j, \quad (1.25)$$

otrzymujemy **kartezjański układ współrzędnych**. Współrzędne (x^1, x^2, \dots, x^n) nazywamy wtedy *współrzędnymi kartezjańskimi* punktu $A \in M$.

Dowolny wektor \overrightarrow{AB} ma następujący rozkład w bazie kanonicznej

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B^1 - x_A^1) \vec{e}_1 + (x_B^2 - x_A^2) \vec{e}_2 + \dots + (x_B^n - x_A^n) \vec{e}_n. \quad (1.26)$$

Wtedy odległość $|AB|$ wyraża się przez współrzędne wektora \overrightarrow{AB} ,

$$|AB| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_B^i - x_A^i)(x_B^j - x_A^j) \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k}. \quad (1.27)$$

lub dla kartezjańskiego układu współrzędnych

$$|AB| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_B^i - x_A^i)^2} \quad (1.28)$$

1.6 Równanie prostej

Prosta w n wymiarowej przestrzeni afinicznej zadana przez punkt A_0 przez który przechodzi oraz wektor kierunku prostej \vec{n} jest określona równaniem

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{n}} \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \quad (1.29)$$

gdzie \vec{r} jest wektorem wodzącym punktów prostej, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA_0}$ to wektor wodzący ustalonego punktu A_0 , a λ jest parametrem. Jest to **postać parametryczna** prostej. Wprowadzając współrzędne wektorów w bazie $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, otrzymujemy

$$x^i = x_0^i + \lambda n^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.30)$$

gdzie n_i to współrzędne wektora kierunkowego \vec{n} .

W trzech wymiarach równanie (1.29) można również zapisać w formie niezależnej od parametru λ . Pamiętajmy, że iloczyn wektorowy $\vec{n} \times \vec{n} = \vec{0}$, mamy

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{n} = \vec{0}} \quad (1.31)$$

Rozpatrzmy dwuwymiarową przestrzeń afiniczną (płaszczyznę) z ortonormalną bazą kartezjańską $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y\}$. Równania (1.30) dla składowych wektora wodzącego prostej to

$$x = x_0 + \lambda n_x, \quad y = y_0 + \lambda n_y. \quad (1.32)$$

Wyliczając λ z jednego z tych równań i podstawiając do drugiego otrzymujemy równanie

$$n_y(x - x_0) - n_x(y - y_0) = 0. \quad (1.33)$$

Jest to warunek prostopadłości wektora $\vec{t} = (n_y, -n_x)$ do wektora $(\vec{r} - \vec{r}_0) \sim \vec{n} = (n_x, n_y)$,

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{t} \perp \vec{n}. \quad (1.34)$$

Tak więc w ogólnym równaniu prostej na płaszczyźnie,

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \quad (1.35)$$

wektor $\vec{t} = (A, B)$ jest *wektorem prostopadłym* do tej prostej.

1.6.1 Odległość punktu od prostej

Własność (1.34) wykorzystamy znajdując wzór na odległość dowolnego punktu płaszczyzny $P = (x_0, y_0)$ od prostej zadanej równaniem (1.35). Równania parametryczne prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt P to

$$x = x_0 + \lambda \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad y = y_0 + \lambda \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (1.36)$$

gdzie dodatkowo unormowaliśmy wektor kierunkowy prostej $\vec{t} = (A, B)$. Zauważmy, że $\lambda = 0$ odpowiada punktowi P, natomiast wartość parametru λ odpowiadająca punktowi przecięcia prostej prostopadłej z daną prostą jest szukaną odległością d punktu od prostej (z dokładnością do znaku). Podstawiając równanie (1.36) do (1.35) dostajemy warunek na punkt przecięcia

$$Ax_0 + By_0 + C + \lambda\sqrt{A^2 + B^2} = 0, \quad (1.37)$$

skąd wynika wzór na szukaną odległość

$$d = |\lambda| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.38)$$

1.7 Równanie płaszczyzny

Płaszczyzna w n wymiarowej przestrzeni afinicznej zadana przez punkt przez który przechodzi A_0 i wektor \vec{t} , który jest do niej prostopadły jest określona równaniem

$$\boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{t} = 0} \quad (1.39)$$

gdzie \vec{r} jest wektorem wodzącym punktów płaszczyzny, natomiast r_0 jest wektorem wodzącym ustalonego punktu A_0 .

W trójwymiarowej przestrzeni afinicznej, po wybraniu kartezjańskiego układu współrzędnych, równanie (1.39) przyjmuje postać

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1.40)$$

gdzie (x, y, z) to współrzędne punktów płaszczyzny, (x_0, y_0, z_0) to współrzędne punktu A_0 , natomiast $\vec{t} = (A, B, C)$ to współrzędne wektora prostopadłego do płaszczyzny. Stąd ogólna postać równania płaszczyzny

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad (1.41)$$

gdzie współczynnik D jest określony na podstawie współrzędnych punktu przez który ona przechodzi,

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0). \quad (1.42)$$

Ćwiczenie - Pokazać, że odległość d punktu $P = (x_0, y_0, z_0)$ od prostej (1.41) jest dana wzorem

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1.43)$$

Rozdział 2

Krzywe stożkowe

Krzywe stożkowe są zadane ogólnym równaniem kwadratowym na płaszczyźnie

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0. \quad (2.1)$$

W zależności od relacji pomiędzy współczynnikami otrzymujemy **elipsę**, **parabolę** i **hiperbolę**. Szczególnym przypadkiem elipsy jest **okrąg**.

2.1 Elipsa

Elipsa to zbiór punktów płaszczyzny spełniających równanie

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (2.2)$$

gdzie zakładamy bez straty ogólności, że $a > b > 0$. Przypadek $a = b = r$, odpowiadający okręgowi o promieniu r , wyłączmy z dalszych rozważań. Postać parametryczna równania elipsy to

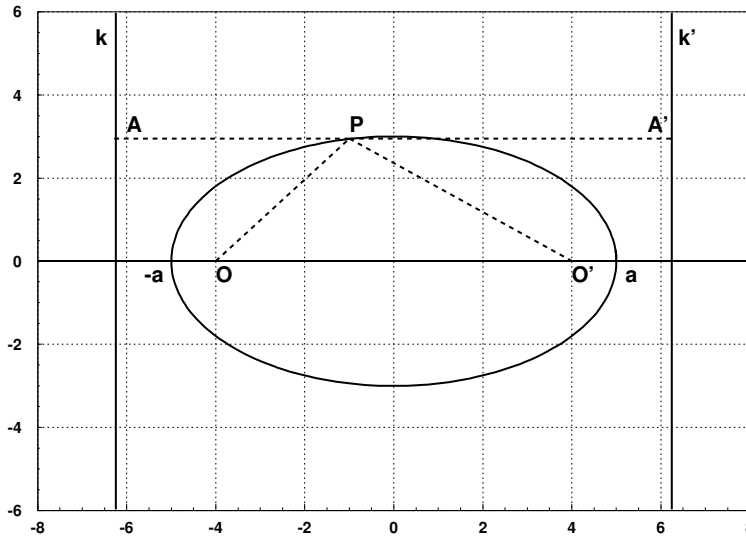
$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Parametr $t = 0, \pi$ odpowiada punktom przecięcia elipsy osi x w punktach, odpowiednio,

$$(a, 0), \quad (-a, 0). \quad (2.4)$$

Ogniska elipsy to punkty na osi x o współrzędnych

$$O = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0), \quad O' = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0). \quad (2.5)$$



Rysunek 2.1: Elipsa o parametrach $a = 5$, $b = 3$ i mimośrodkie $e = 0.8$.

Tak więc odległość między ogniskami to

$$|OO'| = 2\sqrt{a^2 - b^2}. \quad (2.6)$$

Suma odległość dowolnego punktu elipsy P od jej ognisk jest stała i wynosi (patrz Rys. 2.1)

$$|OP| + |O'P| = 2a. \quad (2.7)$$

Mimośrodek e nazywamy stosunek odległości między ogniskami do odległości między punktami przecięcia elipsy z osią x , co daje

$$e = \frac{|OO'|}{2a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (2.8)$$

Zauważmy, że $e < 1$. Ogniska leżą więc wewnątrz elipsy w punktach o współrzędnych

$$O = (-ea, 0), \quad O' = (ea, 0). \quad (2.9)$$

Kierownicą elipsy k sprzężną z ogniskiem O jest prosta równoległa do osi y i przechodząca przez punkt

$$x = -\frac{a}{e}, \quad (2.10)$$

natomiast kierownicą k' sprzężona z ogniskiem O' jest prosta

$$x = \frac{a}{e}. \quad (2.11)$$

Obie kierownice leżą na zewnątrz elipsy. Odległość ognisk od sprzężnych z nimi kierownic wynosi

$$d = \left| \frac{a}{e} - ea \right| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (2.12)$$

Wzory (2.8) i (2.12) pozwalają wyliczyć wartości długości półosi elipsy w funkcji parametrów e i d ,

$$a = \frac{ed}{1 - e^2}, \quad b = \frac{ed}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.13)$$

Stosunek odległości dowolnego punktu elipsy od ogniska do odległości tego punktu od sprzężonej z ogniskiem kierownicy jest równy mimośrodkowi elipsy,

$$\frac{|OP|}{|AP|} = \frac{|O'P|}{|A'P|} = e. \quad (2.14)$$

Ćwiczenie - Udowodnić relacje (2.7) i (2.14) wykorzystując postać parametryczną (2.3) równania paraboli.

2.2 Hiperbola

Hiperbola zadana jest równaniem na płaszczyźnie

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (2.15)$$

Hiperbola ma dwie gałęzie o dodatnich i ujemnych wartościach x ,

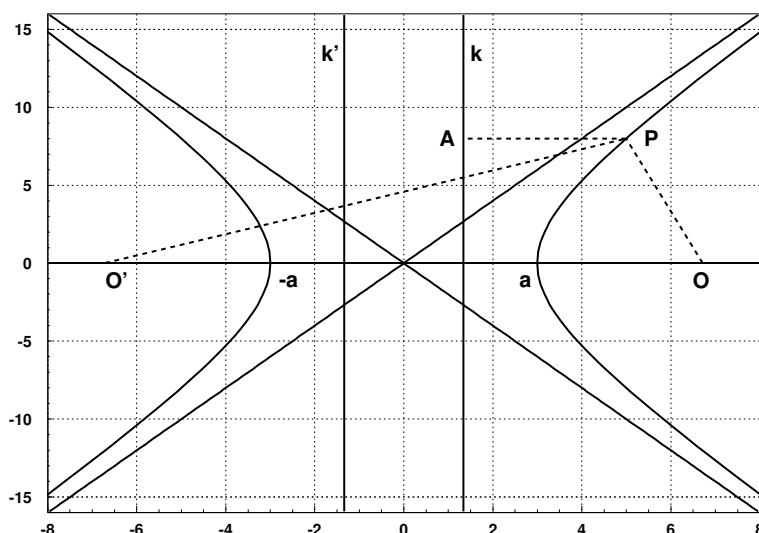
$$x = \pm a \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}}. \quad (2.16)$$

Obie gałęzie posiadają asymptoty do których dążą gdy $x \rightarrow \pm\infty$,

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (2.17)$$

Postać parametryczna dodatniej gałęzi hiperboli to

$$\begin{aligned} x &= a \cosh t \\ y &= b \sinh t, \quad t \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (2.18)$$



Rysunek 2.2: Hiperbola o parametrach $a = 3$, $b = 6$ i mimośrodku $e = 2.24$.

Dla ujemnej gałęzi znak zmiennej x jest przeciwny. Wartość parametru $t = 0$ odpowiada punktom przecięcia gałęzi hiperboli z osią x o współrzędnych

$$(\pm a, 0). \quad (2.19)$$

Ogniska hiperboli to punkty O' dla gałęzi ujemnej i O dla gałęzi dodatniej o współrzędnych

$$O' = (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0), \quad O = (\sqrt{a^2 + b^2}, 0). \quad (2.20)$$

Odległość między ogniskami to

$$|OO'| = 2\sqrt{a^2 + b^2}. \quad (2.21)$$

Moduł różnicy odległości dowolnego punktu hiperboli P od obu ognisk jest stały i wynosi (patrz Rys. 2.2)

$$||O'P| - |OP|| = 2a. \quad (2.22)$$

Mimośród, zdefiniowany jako stosunek odległości ognisk do odległości między punktami przecięcia gałęzi hiperboli z osią x , wynosi

$$e = \frac{|OO'|}{2a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1. \quad (2.23)$$

Podobnie jak dla elipsy ogniska leżą w punktach

$$O' = (-ea, 0), \quad O = (ea, 0). \quad (2.24)$$

Kierownice hiperboli są prostymi równoległymi do osi x , przechodzącymi przez punkt

$$x = \pm \frac{a}{e}, \quad (2.25)$$

gdzie znak (+) odnosi się do kierownicy k sprzężonej z ogniskiem O , natomiast znak (–) do kierownicy k' sprzężonej z ogniskiem O' . Odległość ognisk od sprzężonych co nich kierownic wynosi

$$d = \left| ea - \frac{a}{e} \right| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2.26)$$

Relacje (2.23) i (2.26) pozwalają wyliczyć parametry a i b hiperboli w funkcji parametrów e i d ,

$$a = \frac{ed}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{ed}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (2.27)$$

Stosunek odległości dowolnego punktu P dodatniej gałęzi hiperboli od ogniska O do odległości tego punktu od kierownicy k jest stały i równy mimośrodkowi hiperboli,

$$\frac{|OP|}{|AP|} = e. \quad (2.28)$$

Podobnie dla punktów ujemnej gałęzi, ogniska O' i kierownicy k' .

Ćwiczenie - Udowodnić relacje (2.22) i (2.28) wykorzystując postać parametryczną (2.18) równania hiperboli.

2.3 Parabola

Równanie paraboli na płaszczyźnie to

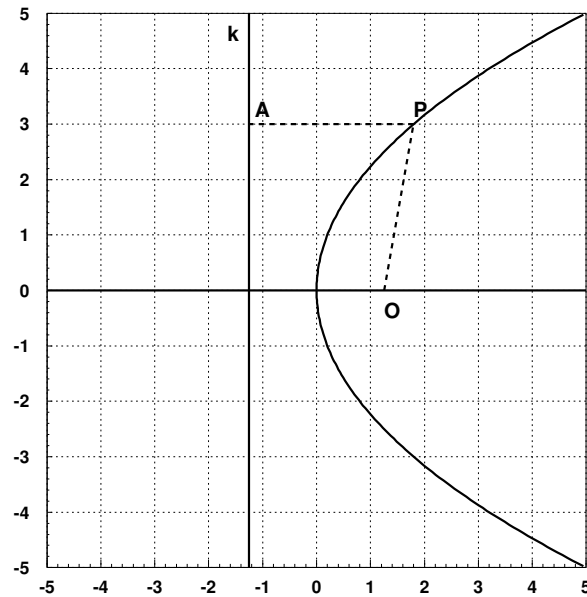
$$\boxed{x = ay^2} \quad a > 0. \quad (2.29)$$

Równanie parametryczne to

$$\begin{aligned} x &= at^2 \\ y &= t, \quad t \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ognisko paraboli O leży na osi x i ma współrzędne

$$O = \left(\frac{1}{4a}, 0 \right). \quad (2.31)$$



Rysunek 2.3: Parabola o parametrze $a = 1/5$.

Kierownica k paraboli to prosta równoległa do osi y o równaniu

$$x = -\frac{1}{4a}. \quad (2.32)$$

Odległość ogniska od kierownicy wynosi

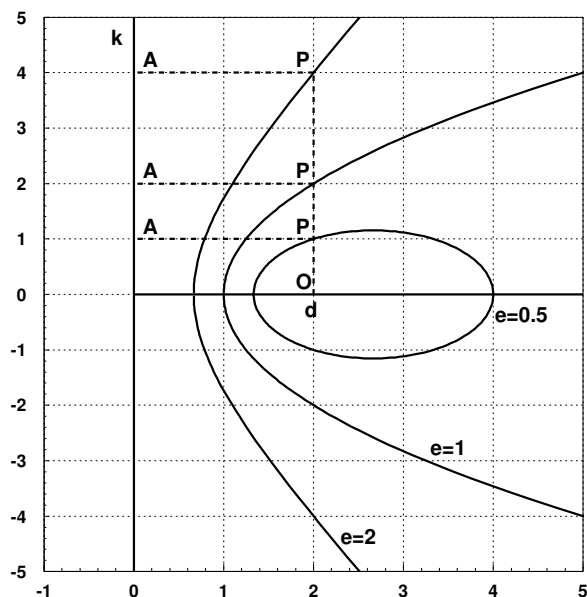
$$d = \frac{1}{2a}, \quad (2.33)$$

natomiast punkt przecięcia paraboli z osią x znajduje się w połowie odległości między ogniskiem a kierownicą. Zauważmy, że dla $d \rightarrow 0$ elipsa staje się coraz szersza, gdyż $a \rightarrow \infty$.

Dowolny punkt P hiperboli jest równo odległy od ogniska O i kierownicy k (patrz Rys. 2.3),

$$\frac{|OP|}{|AP|} = 1. \quad (2.34)$$

Stosunek ten określa też mimośród paraboli, $e = 1$.



Rysunek 2.4: Krzywe stożkowe. Zwróć uwagę, że dla wybranych punktów P na rysunku, odległość $|OP| = ed = p$.

Ćwiczenie - Udowodnić relację (2.34) wykorzystując postać parametryczną (2.30) równania paraboli.

2.4 Postać biegunowa krzywych stożkowych

Krzywe stożkowe można określić przy pomocy jednego wzoru wprowadzając kierownicę k i ognisko O odległe od kierownicy o odległość d . Krzywą stożkową definiujemy wtedy jako zbiór punktów P płaszczyzny, dla których stosunek odległości od ogniska O do odległości do kierownicy k jest stały i równy mimośrodkowi krzywej stożkowej e (patrz Rys. 2.4),

$$\frac{|OP|}{|AP|} = e = \text{const.} \quad (2.35)$$

W zależności od wartości e , otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 < e < 1 & \quad \text{elipsa} \\ e = 1 & \quad \text{parabola} \\ e > 1 & \quad \text{hiperbola} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe (r, ϕ) wyprowadzone z ogniska O , otrzymujemy dla równania (2.35)

$$\frac{r}{d + r \cos \phi} = e, \quad (2.37)$$

gdzie kąt ϕ liczy się od osi x prostopadłej do kierownicy i przechodzącej przez ognisko O , w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Stąd równanie krzywej stożkowej

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - e \cos \phi}} \quad p = ed. \quad (2.38)$$

W każdym przypadku minimalny promień r_{min} odpowiadający punktowi przecięcia krzywej stożkowej z osią x jest określony z warunku $\phi = \pi$ i wynosi

$$r_{min} = \frac{e}{1 + e}d. \quad (2.39)$$

Ponieważ $r_{min} < d$, leży on zawsze między ogniskiem a kierownicą.

Promień maksymalny r_{max} zależy od krzywej stożkowej. Dla elipsy otrzymujemy go dla kąta $\phi = 0$,

$$r_{max} = \frac{e}{1 - e}d. \quad (2.40)$$

Odpowiadający mu punkt leży na osi x po prawej stronie ogniska O . Łatwo sprawdzić, że

$$r_{min} + r_{max} = 2a, \quad (2.41)$$

a drugie ognisko O' leży na prawo od ogniska O w odległości

$$r_{max} - r_{min} = 2\sqrt{a^2 - b^2}, \quad (2.42)$$

gdzie parametry elipsy a i b są określone wzorami (2.13).

Dla paraboli $e = 1$ i ze wzoru (2.38) wynika, że $r_{max} \rightarrow \infty$ gdy $\phi \rightarrow 0^+$. Dla hiperboli $e > 1$ i istnieje minimalny kąt ϕ_{min} powyżej którego równanie (2.38) ma sens geometryczny. Jest on określony równaniem

$$\cos \phi_{min} = \frac{1}{e}, \quad (2.43)$$

a promień $r_{max} \rightarrow \infty$ gdy $\phi \rightarrow \phi_{min}^+$. Kąt ten określa tangens nachylenia asymptoty dodatniej gałęzi hiperboli,

$$\text{tg } \phi_{min} = \sqrt{e^2 - 1} = \frac{b}{a}. \quad (2.44)$$

Ćwiczenie - Znaleźć odległość punktu przecięcia asymptot hiperboli od kierownicy k w funkcji parametrów e i d . Po której stronie kierownicy znajduje się ten punkt.

2.5 Sprowadzanie do postaci kanonicznej

Równanie (2.1) można zapisać w postaci macierzowej

$$\hat{x}^T \hat{A} \hat{x} + \hat{D}^T \hat{x} + F = 0, \quad (2.45)$$

gdzie $\hat{x}^T = (x, y)$, $\hat{D}^T = (D, E)$, F jest liczbą, natomiast macierz

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

jest macierzą symetryczną. Macierz tę można sprowadzić do postaci diagonalnej przy pomocy transformacji ortogonalnej \hat{O} , która prowadzi do nowych zmiennych $\hat{x}'^T = (x', y')$,

$$\hat{x}' = \hat{O}^T \hat{x}, \quad \hat{O}^T \hat{O} = \hat{O} \hat{O}^T = 1 \quad (2.47)$$

oraz

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \hat{O}^T \hat{A} \hat{O}. \quad (2.48)$$

Równanie (2.45) przyjmuje postać bez członów wieszanych

$$\hat{x}'^T \hat{\Lambda} \hat{x}' + \hat{D}^T \hat{O} \hat{x}' + F = 0, \quad (2.49)$$

lub w jawnej postaci

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0, \quad (2.50)$$

gdzie $\hat{D}^T \hat{O} = (D', E')$. Równanie to można zapisać w formie sumy kwadratów. Na przykład, gdy $\lambda_1 \neq 0$ oraz $\lambda_2 \neq 0$ mamy

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{D'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{E'}{2\lambda_2} \right)^2 + F - \frac{D'^2}{4\lambda_1} - \frac{E'^2}{4\lambda_2} = 0. \quad (2.51)$$

W zależności od znaków λ_1 i λ_2 oraz wyrazu wolnego otrzymujemy krzywą stożkową lub zbiór pusty.

Ćwiczenie - Jaką krzywą stożkową przedstawia równanie

$$10x^2 + 10y^2 - 12xy + 20x - 12y + 8 = 0.$$

Rozdział 3

Tensory

3.1 Krzywoliniowe układy współrzędnych

W kartezjańskim układzie współrzędnych punkty P są scharakteryzowane przez współrzędne kartezjańskie wektora wodzącego

$$\vec{r} = x^1 \vec{i}_1 + x^2 \vec{i}_2 + x^3 \vec{i}_3 \equiv (x^1, x^2, x^3). \quad (3.1)$$

Zwróćmy uwagę, że tym razem współrzędne mają wskaźniki górne. Będzie to istotne w dalszej części rozważań. Wektory bazowe, $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$, tworzą bazę ortonormalną,

$$\vec{i}_i \cdot \vec{i}_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

Można wprowadzić inne współrzędne (q^1, q^2, q^3) takie, że istnieje wzajemnie jednoznaczny związek między tymi współrzędnymi, a współrzędnymi kartezjańskimi

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(q^1, q^2, q^3) \\ x^2 &= x^2(q^1, q^2, q^3) \\ x^3 &= x^3(q^1, q^2, q^3), \end{aligned} \quad (3.3)$$

w skrócie $x^i = x^i(q^\alpha)$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym jednoznaczności takiej transformacji jest różny od zera jakobian tej transformacji

$$J = \left| \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(q^1, q^2, q^3)} \right| = \begin{vmatrix} \partial x^1 / \partial q^1 & \partial x^1 / \partial q^2 & \partial x^1 / \partial q^3 \\ \partial x^2 / \partial q^1 & \partial x^2 / \partial q^2 & \partial x^2 / \partial q^3 \\ \partial x^3 / \partial q^1 & \partial x^3 / \partial q^2 & \partial x^3 / \partial q^3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (3.4)$$

lub w skrócie $|\partial x^i / \partial q^\alpha| \neq 0$.

Ustalając dwie z nowych współrzędnych otrzymujemy krzywą scharakteryzowaną nieustalonym parametrem: $\vec{r} = \vec{r}(u^\alpha)$. Zmieniając kolejno biegnący parametr otrzymujemy

siatkę współrzędnych krzywoliniowych. W każdym punkcie P można zdefiniować trzy wektory bazowe styczne do krzywych o ustalonej wartości dwóch nowych współrzędnych,

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &\equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} = \frac{\partial x^1}{\partial q^1} \vec{i}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial q^1} \vec{i}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial q^1} \vec{i}_3 \\ \vec{e}_2 &\equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2} = \frac{\partial x^1}{\partial q^2} \vec{i}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial q^2} \vec{i}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial q^2} \vec{i}_3 \\ \vec{e}_3 &\equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3} = \frac{\partial x^1}{\partial q^3} \vec{i}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial q^3} \vec{i}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial q^3} \vec{i}_3.\end{aligned}\quad (3.5)$$

W skrócie może ten układ zapisać w postaci

$$\boxed{\vec{e}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \vec{i}_i} \quad (3.6)$$

gdzie sumujemy po dwukrotnie powtarzającym się wskaźniku $i = 1, 2, 3$. Nieznikanie jacobianu (3.4) w każdym punkcie kwarantuje, że nowe wektory są bazą oraz istnieje wzór odwrotny do (3.6),

$$\boxed{\vec{i}_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \vec{e}_\alpha} \quad (3.7)$$

gdzie macierz $\partial q^\alpha / \partial x^i$ jest macierzą odwrotną do macierzy $\partial x^i / \partial q^\alpha$

$$\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^j} = \delta_j^i. \quad (3.8)$$

We wzorze tym sumujemy po α . Podobnie, słuszna jest relacja

$$\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad (3.9)$$

gdzie tym razem sumujemy po i .

Policzmy iloczyn skalarny nowych wektorów bazowych

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial q^\beta} \vec{i}_i \cdot \vec{i}_j = \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial q^\beta} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial q^\beta}. \quad (3.10)$$

Jeżeli współrzędne $q^\alpha(x_i)$ prowadzą do bazy ortogonalnej,

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = h_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.11)$$

to takie współrzędne nazwiemy ortogonalnymi. Współczynniki h_α , zwane współczynnikami Lamego, są długością wektorów bazowych \vec{e}_α ,

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial q^1}\right)^2} \\ h_2 &= \sqrt{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial q^2}\right)^2} \\ h_3 &= \sqrt{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial q^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial q^3}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dzieląc każdy z wektorów nowej bazy \vec{e}_α przez jego długość h_α otrzymujemy lokalną bazę ortonormalną. Wtedy (nie sumujemy po α)

$$\hat{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\alpha} \quad \text{i} \quad \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.13)$$

3.2 Popularne układy współrzędnych

Najbardziej popularne ortogonalne układy współrzędnych to

- współrzędne biegunowe

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi, \quad \rho \in (0, \infty), \quad \phi \in [0, 2\pi) \end{aligned} \quad (3.14)$$

- współrzędne walcowe

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z, \quad \rho \in (0, \infty), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad z \in (-\infty, \infty) \end{aligned} \quad (3.15)$$

- współrzędne sferyczne

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta, \quad r \in (0, \infty), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Współczynniki Lamego dla powyższych układów współrzędnych podajemy w tabelce.

Nazwa	Współrzędne	Współczynniki Lamego
kartezjańskie	(x, y, z)	$h_x = 1 \quad h_y = 1 \quad h_z = 1$
biegunowe	(ρ, ϕ)	$h_\rho = 1 \quad h_\phi = \rho$
walcowe	(ρ, ϕ, z)	$h_\rho = 1 \quad h_\phi = \rho \quad h_z = 1$
sferyczne	(r, θ, ϕ)	$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\phi = r \sin \theta$

Ćwiczenie - Znaleźć wektory bazowe dla powyższych układów współrzędnych i wyliczyć współczynniki Lamego z tabelki. Unormować do jedynki wektory bazowe.

3.3 Tensory

3.3.1 Różniczka i gradient

Odwróćmy relację między współrzędnymi kartezjańskimi, a współrzędnymi krzywoliniowymi, $x^i = x^i(q^1, q^2, q^3)$ dla $i = 1, 2, 3$, otrzymując $q^\alpha = q^\alpha(x^1, x^2, x^3)$ dla $\alpha = 1, 2, 3$, a następnie policzmy różniczkę nowych zmiennych,

$$dq^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^3} dx^3 \quad (3.17)$$

lub w zapisie z konwencją sumacyjną po dwukrotnie powtarzającym się wskaźniku i

$$\boxed{dq^\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} dx^i} \quad (3.18)$$

Zauważmy, że różniczka nowych współrzędnych dq^α transformuje się tak jak wektory bazowe w relacji odwrotnej (3.22),

$$\vec{i}_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \vec{e}_\alpha \quad (3.19)$$

poprzez macierz odwrotną do macierzy $(\partial x^i / \partial q^\alpha)$. Jest to sposób **przeciwwzienniczy** lub **kontrawariantny** transformacji.

Sprawdźmy teraz jak transformują się składowe gradientu funkcji $\phi(x^1, x^2, x^3)$, zapisanej jako funkcja zmiennych krzywoliniowych $(q^\alpha) \equiv (q^1, q^2, q^3)$,

$$\phi(q^\alpha) \equiv \phi(x^1(q^\alpha), x^2(q^\alpha), x^3(q^\alpha)). \quad (3.20)$$

Otrzymamy

$$\frac{\partial \phi}{\partial q^\alpha} \equiv \partial_\alpha \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \equiv \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \partial_i \phi. \quad (3.21)$$

Ostatecznie

$$\partial_\alpha \phi = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \partial_i \phi \quad (3.22)$$

Tym razem składowe gradientu transformują się tak jak wektory bazowe we wzorze (3.6),

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \vec{e}_i, \quad (3.23)$$

poprzez macierz $(\partial x^i / \partial q^\alpha)$. Tak więc składowe gradientu funkcji transformują się w sposób **współzmienniczy** lub **kowariantny** z wektorami bazowymi.

3.3.2 Definicja tensora

Wzory (3.18) i (3.22) to dwa sposoby transformacji składowych obiektów geometrycznych przy zmianie układu współrzędnych. Obiekty z dolnym wskaźnikiem transformują się współzmienniczo (kowariantnie) z wektorami bazowymi przy zmianie układu współrzędnych, natomiast obiekty z górnymi wskaźnikami transformują się przeciwzmienniczo (kontrawariantnie). Stąd ogólna definicja.

Tensorom k -krotnie **kontrawariantnym** i l -krotnie **kowariantnym** nazywamy obiekt geometryczny, którego współrzędne w danej bazie, $T_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}$, transformują się przy zmianie układu współrzędnych, $q^\alpha = q^\alpha(x^i)$, w następujący sposób

$$T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = \frac{\partial q^{\alpha_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial q^{\alpha_2}}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial q^{\alpha_k}}{\partial x^{i_k}} T_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial q^{\beta_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial q^{\beta_2}} \dots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial q^{\beta_l}} \quad (3.24)$$

gdzie sumujemy po prawej stronie po powtarzających się wskaźnikach łańciskich,

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) \text{ oraz } (j_1, j_2, \dots, j_l), \quad (3.25)$$

z zakresem ich zmienności $\{1, 2, \dots, N\}$, gdzie N jest wymiarem przestrzeni (liczbą wektorów bazowych). Mówimy, że taki tensor jest **typu** (k, l) .

3.3.3 Operacja na tensorach

Na tensorach można wykonać szereg operacji, takich jak dodawanie tensorów tego samego typu,

$$A_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} = B_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} + C_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}, \quad (3.26)$$

oraz mnożenie przez dowolną liczbę rzeczywistą λ ,

$$A_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \lambda B_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k}. \quad (3.27)$$

Możemy również pomnożyć przez siebie tensory różnego typu,

$$B_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} C_{j_1 j_2 \dots j_m}^{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv A_{j_1 j_2 \dots j_{l+m}}^{i_1 i_2 \dots i_{k+n}}. \quad (3.28)$$

W wyniku otrzymujemy tensor typu $(k+n, l+m)$.

Możliwa jest również operacja kontrakcji - sumowania po dolnych i górnych wskaźnikach, która prowadzi do tensora niższego typu. Na przykład, sumując po pierwszym górnym wskaźniku i drugim dolnym, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^N B_{j_1 i j_3 \dots j_l}^{i i_2 i_3 \dots i_k} \equiv A_{j_1 j_3 \dots j_l}^{i_2 i_3 \dots i_k}, \quad (3.29)$$

We wzorze tym jawnie zaznaczyliśmy sumowanie czego zwykle się nie robi, przyjmując konwencję sumowania po powtarzających się wskaźnikach górnych i dolnych. Otrzymany tensor jest typu $(k-1, l-1)$.

3.3.4 Niezmienniki tensorowe

Niezmienniki tensorowe (skalary) powstają poprzez zwężenie (kontrakcję) wszystkich wskaźników górnych i dolnych w tensorze lub w iloczynach tensorów. W wyniku otrzymujemy liczbę, której wartość jest niezależna od wyboru układu współrzędnych. Na przykład, niezmiennikiem jest wielkość

$$A^\alpha B_\alpha, \quad (3.30)$$

gdyż

$$A^\alpha B_\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial q^\alpha} A^i B_j = \delta_i^j A^i B_j = A^j B_j. \quad (3.31)$$

Poniżej podajemy przykłady innych niezmienników tensorowych

$$A_\alpha^\alpha, \quad \delta_i^i, \quad A^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha}, \quad A^{i_1 i_2 i_3} B_{i_1} C_{i_2 i_3}. \quad (3.32)$$

Nie jest natomiast niezmiennikiem wielkość zbudowana poprzez sumowanie wskaźników na tym samym poziomie, na przykład

$$\sum_{\alpha=1}^3 A^\alpha B^\alpha. \quad (3.33)$$

Ćwiczenie - Pokazać, że (3.33) nie jest niezmiennikiem.

3.4 Element długości i tensor metryczny

Kwadrat infinitezymalnie małego elementu długości we współrzędnych kartezjańskich to

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.34)$$

gdzie $g_{ij} = \delta_{ij}$ są składowymi tensora metrycznego w bazie kartezjańskiej, $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$. Po zmianie układu współrzędnych

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} dq^\alpha dq^\beta, \quad (3.35)$$

gdzie sumujemy po $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Kwadratu elementu długości w dowolnym układzie współrzędnych można więc zapisać w formie

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta, \quad (3.36)$$

gdzie

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} \quad (3.37)$$

są składowymi tensora metrycznego w nowej bazie, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Tym razem składowe tensora metrycznego zależą od współrzędnych punktu $q = (q^1, q^2, q^3)$, w którym są liczone

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(q), \quad (3.38)$$

Ze wzoru (3.10) wynika, że tensor metryczny można zapisać poprzez iloczyn skalarny wektorów bazowych

$$g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta \quad (3.39)$$

Tensor metryczny jest tensorem dwukrotnie kowariantny, gdyż relację (3.37) można zapisać w postaci

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial q^\beta} \delta_{ij}. \quad (3.40)$$

Ponieważ $\delta_{ij} = g_{ij}$ są składowymi tensora metrycznego w bazie kartezjańskiej, wzór (3.40) jest prawem transformacyjnym (3.24) dla tensora typu (0,2), czyli tensora dwukrotnie kowariantnego.

W przypadku współrzędnych ortogonalnych tensor metryczny jest diagonalny

$$g_{\alpha\alpha} = h_\alpha^2 \quad \text{i} \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{gdy} \quad \alpha \neq \beta. \quad (3.41)$$

lub w notacji macierzowej

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Wtedy kwadrat elementu długości to

$$ds^2 = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2 \quad (3.43)$$

a wyznacznik macierzy tensora metrycznego wynosi

$$\det(g_{\alpha\beta}) = h_1^2 h_2^2 h_3^2. \quad (3.44)$$

Wzory te łatwo zapisać dla dowolnego wymiaru przestrzeni n , zamieniając $3 \rightarrow n$.

3.5 Kontrawariantny tensor metryczny

Wprowadza się również współczynniki kontrawariantne tensora metrycznego $g^{\alpha\beta}$ takie, że

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (3.45)$$

Łatwo pokazać, że wzór analogiczny do (3.37) to

$$g^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^j}, \quad (3.46)$$

gdyż spełniona jest relacja (3.45),

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^j} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} \frac{\partial x^i}{\partial q^\gamma} \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^\gamma} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\beta} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial q^\gamma} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q^\gamma} = \delta_\gamma^\alpha. \end{aligned}$$

Dla współrzędnych ortogonalnych

$$g^{\alpha\alpha} = \frac{1}{h_\alpha^2} \quad \text{i} \quad g^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{gdy} \quad \alpha \neq \beta. \quad (3.47)$$

lub w notacji macierzowej

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1/h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Ćwiczenie - Pokazać, że $g^{\alpha\beta}$ jest tensorem dwukrotnie kontrawariantnym.

Kowariantny tensor metryczny kowariantny zamienia wskaźniki kontrawariantne (górne) tensora na wskaźniki kowariantne (dolne), na przykład

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta. \quad (3.49)$$

natomiast tensor kontrawariantny odwraca tę relację

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta. \quad (3.50)$$

W obu przypadkach sumujemy po $\beta = 1, 2, 3$. Dla współrzędnych ortogonalnych mamy więc (brak sumowania po α)

$$A_\alpha = h_\alpha^2 A^\alpha \quad (3.51)$$

oraz

$$A^\alpha = \frac{1}{h_\alpha^2} A_\alpha. \quad (3.52)$$

3.6 Element objętości

Element objętości w kartezjańskim układzie współrzędnych zadany jest wzorem

$$\boxed{dV = dx^1 dx^2 dx^3} \quad (3.53)$$

Przy zmianie układu element jest wyrażony poprzez moduł jacobianu transformacji (3.4)

$$dV = \left| \left| \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \right| \right| dq^1 dq^2 dq^3. \quad (3.54)$$

Relacja (3.40), interpretowana macierzowo, pozwala nam związać jacobian z wyznacznikiem kowariantnego tensora metrycznego

$$\det(g_{\alpha\beta}) = \left| \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \right|^2. \quad (3.55)$$

Stąd element objętości w dowolnym układzie współrzędnych

$$dV = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} dq^1 dq^2 dq^3 \quad (3.56)$$

Dla współrzędnych ortogonalnych przyjmuje on postać

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3 \quad (3.57)$$

Ćwiczenie - Wyliczyć element długości i objętości dla współrzędnych z poniższej tabelki.

Współrzędne	Element długości	Element objętości
kartezjańskie	$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$	$dV = dx dy dz$
biegunowe	$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$	$dV = \rho d\rho d\phi$
walcowe	$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$	$dV = \rho d\rho d\phi dz$
sferyczne	$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$	$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Rozdział 4

Operatory różniczkowe

4.1 Gradient

Rozważmy rzeczywistą funkcję skalarną w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej,

$$\phi = \phi(x^1, x^2, x^3), \quad (4.1)$$

gdzie (x^i) to współrzędne wektora wodzącego \vec{r} w ortonormalnej bazie wektorów $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3\}$,

$$\vec{r} = x^1 \vec{i}_1 + x^2 \vec{i}_2 + x^3 \vec{i}_3. \quad (4.2)$$

Gradient funkcji ϕ to funkcja wektorowa

$$\boxed{\text{grad}\phi = \vec{i}_1 \frac{\partial\phi}{\partial x^1} + \vec{i}_2 \frac{\partial\phi}{\partial x^2} + \vec{i}_3 \frac{\partial\phi}{\partial x^3}} \quad (4.3)$$

Jeżeli zdefiniujemy wektorowy operator różniczkowy *nabla*

$$\nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \quad (4.4)$$

to gradient można zapisać jako wynik działania tego operatora na funkcję ϕ ,

$$\boxed{\text{grad}\phi = \nabla\phi} \quad (4.5)$$

Rozważmy różniczkę funkcji ϕ

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3} dx^3. \quad (4.6)$$

Można ją zapisać w formie iloczynu skalarnego

$$d\phi = \nabla\phi \cdot \vec{dr} = |\nabla\phi| |\vec{dr}| \cos\alpha, \quad (4.7)$$

gdzie $\vec{dr} = (dx^1, dx^2, dx^3)$. Zmieniając kierunek wektora przyrostu argumentów \vec{dr} przy ustalonej jego długości otrzymujemy największą wartość przyrostu funkcji $d\phi$ dla $\vec{dr} \parallel \nabla\phi$ ($\alpha = 0$). Stąd - gradient funkcji wskazuje kierunek jej największego wzrostu w przestrzeni argumentów funkcji.

4.2 Dywergencja

Rozważmy funkcję wektorową w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej

$$\vec{A} = A_1 \vec{i}_1 + A_2 \vec{i}_2 + A_3 \vec{i}_3, \quad (4.8)$$

gdzie każda ze składowych zależy od składowych wektora \vec{r} ,

$$A_i = A_i(x^1, x^2, x^3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.9)$$

Operator dywergencji przyporządkowuje funkcji wektorowej \vec{A} funkcję skalarną

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3}} \quad (4.10)$$

Policzmy dywergencję z gradientu funkcji skalarnej

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 \phi}{(\partial x^3)^2}. \quad (4.11)$$

Operator działający na funkcję skalarną po prawej stronie nazywa się operatorem Laplace'a lub *laplasjanem* i oznacza się go symbolem

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \operatorname{div} \operatorname{grad}, \quad (4.12)$$

który przyjmuje następującą postać we współrzędnych kartezjańskich

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}} \quad (4.13)$$

4.3 Rotacja

Operator rotacji przyporządkowuje funkcji wektorowej \vec{A} nową funkcję wektorową

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}} \quad (4.14)$$

co po rozwinięciu daje

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{i}_1 (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \vec{i}_2 (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) + \vec{i}_3 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \quad (4.15)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.16)$$

Pole \vec{A} dla którego $\operatorname{rot} \vec{A} \neq \vec{0}$ nazywamy *polem wirowym* .

Łatwo udowodnić tożsamość

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0} \quad (4.17)$$

Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \partial_1 (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) + \partial_2 (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) + \partial_3 (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \\ &= (\partial_1 \partial_2 - \partial_2 \partial_1) A_3 + (\partial_2 \partial_3 - \partial_3 \partial_2) A_1 + (\partial_3 \partial_1 - \partial_1 \partial_3) A_2 = 0 \end{aligned}$$

o ile pochodne cząstkowe są przemienne, co oznacza, że składowe A_i muszą być ciągłe aż do drugich pochodnych. Funkcje (pola) wektorowe, dla których dywergencja znika nazywamy polami *beźródłowymi*. Tak więc pole

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (4.18)$$

jest polem beźródłowym.

Podobnie można udowodnić tożsamość

$$\boxed{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = \nabla \times (\nabla \phi) = \vec{0}} \quad (4.19)$$

mamy bowiem dla funkcji ϕ jest ciągłej aż do drugich pochodnych

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \phi) &= \vec{i}_1 (\partial_2 \partial_3 \phi - \partial_3 \partial_2 \phi) \\ &+ \vec{i}_2 (\partial_3 \partial_1 \phi - \partial_1 \partial_3 \phi) + \vec{i}_3 (\partial_1 \partial_2 \phi - \partial_2 \partial_1 \phi) = \vec{0}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pola dla których rotacja znika nazywamy polami *bezwirowymi* lub *potencjalnymi*. Tak więc pole

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi \quad (4.21)$$

jest polem potencjalnym.

4.4 Zapis tensorowy

Operacje różniczkowe można zapisać przy w formie tensorowej pomocy składowych kartezjańskich

$$(\nabla \phi)_i = \partial_i \phi \quad (4.22)$$

$$(\nabla \cdot \vec{A}) = \partial_i A_i \quad (4.23)$$

$$(\nabla \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \quad (4.24)$$

gdzie sumujemy po powtarzających się wskaźnikach $i, j, k = 1, 2, 3$, a ϵ_{ijk} jest kompletnie antysymetrycznym tensorem Leviego-Civity,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{(ijk) permutacja parzysta} \\ -1 & \text{(ijk) permutacja nieparzysta} \\ 0 & \text{i=j lub j=k lub i=k} \end{cases} \quad (4.25)$$

Udowodnijmy raz jeszcze tożsamości (4.17) i (4.19):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \partial_i (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k) = (\epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j) A_k = 0, \quad (4.26)$$

$$(\nabla \times (\nabla \phi))_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\partial_k \phi) = (\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k) \phi = \vec{0}_i. \quad (4.27)$$

W dowodzie wykorzystaliśmy własność mówiącą, że suma po składowych iloczynu tensorów symetrycznego i antysymetrycznego daje zero

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)} A_{ij}^{(sym)} B_{ij}^{(asym)} &= \sum_{(i<j)} A_{ij}^{(sym)} B_{ij}^{(asym)} + \sum_{(i>j)} A_{ij}^{(sym)} B_{ij}^{(asym)} \\ &= \sum_{(i<j)} A_{ij}^{(sym)} B_{ij}^{(asym)} - \sum_{(j<i)} A_{ji}^{(sym)} B_{ji}^{(asym)} \\ &= \sum_{(i<j)} A_{ij}^{(sym)} B_{ij}^{(asym)} - \sum_{(i<j)} A_{ij}^{(sym)} B_{ij}^{(asym)} = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

gdzie przy zmianie kolejności wskaźników

$$A_{ji}^{(sym)} = A_{ij}^{(sym)}, \quad B_{ji}^{(asym)} = -B_{ij}^{(asym)}. \quad (4.29)$$

Ćwiczenie - Stosując zapis tensorowy udowodnić następującą tożsamość

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \quad (4.30)$$

4.5 Operatory we współrzędnych krzywoliniowych

4.5.1 Gradient

Po zamianie współrzędnych kartezjańskich na ortogonalne współrzędne krzywoliniowe, $x^i = x^i(q^\alpha)$, operacje różniczkowania przyjmują nową postać. Dla gradientu otrzymujemy

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q^1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q^2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q^3} \hat{e}_3 \quad (4.31)$$

gdzie h_α to współczynniki Lamego, a wektory $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ to *unormowane do jedynki* ortogonalne wektory bazowe dla współrzędnych krzywoliniowych

$$\hat{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \vec{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\alpha}. \quad (4.32)$$

Mamy bowiem

$$\nabla\phi \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \vec{i}_i = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial\phi}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \right) \frac{\partial q^\beta}{\partial x^i} \vec{e}_\beta, \quad (4.33)$$

gdzie wykorzystaliśmy wzór na pochodną funkcji złożonej oraz odwróconą relację dla wektorów bazowych (wektory \vec{e}_β nie są unormowane do jedynki),

$$\vec{i}_i = \frac{\partial q^\beta}{\partial x^i} \vec{e}_\beta. \quad (4.34)$$

Z definicji tensora kontrawariantnego tensora metrycznego, otrzymujemy

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial q^\alpha} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^i} \right) \vec{e}_\beta = \frac{\partial\phi}{\partial q^\alpha} g^{\alpha\beta} \vec{e}_\beta. \quad (4.35)$$

Dla współrzędnych ortogonalnych $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}/h_\alpha^2$ i stąd wzór (4.31),

$$\nabla\phi = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial q^\alpha} \hat{e}_\alpha, \quad (4.36)$$

gdzie wektory \hat{e}_α są już unormowane do jedynki.

Ćwiczenie - Znaleźć operator gradientu dla układów współrzędnych z tabelki w poprzednim rozdziale.

4.5.2 Dywergencja

Dla dywergencji otrzymujemy

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q^2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q^3} (A_3 h_1 h_2) \right\} \quad (4.37)$$

gdzie A_α to składowe wektora \vec{A} w bazie *ortonormalnych* wektorów \hat{e}_α ,

$$\vec{A} = \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha \hat{e}_\alpha \quad (4.38)$$

Ćwiczenie - Znaleźć dywergencję we współrzędnych z tabelki.

4.5.3 Rotacja

Podobnie dla rotacji znajdujemy

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 h_1 & \hat{e}_2 h_2 & \hat{e}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q^1} & \frac{\partial}{\partial q^2} & \frac{\partial}{\partial q^3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (4.39)$$

co po rozwinięciu daje

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial q^3} \right) \hat{e}_1 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q^1} \right) \hat{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial q^2} \right) \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Ćwiczenie - Znaleźć rotację we współrzędnych z tabelki.

4.5.4 Laplasjan

Znajdźmy jeszcze operator Laplace'a,

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}, \quad (4.41)$$

we współrzędnych krzywoliniowych. Ze wzorów (4.31) i (4.37), otrzymujemy

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q^3} \right) \right\} \quad (4.42)$$

Ćwiczenie - Znaleźć laplasjan we współrzędnych z tabelki.

4.5.5 Laplasjan dla dowolnych współrzędnych

Wykorzystując rozróżnienie składowych ko- i kontrawariantnych oraz relację

$$\sqrt{\det(g_{\mu\nu})} = h_1 h_2 h_3 \quad (4.43)$$

dla współrzędnych ortogonalnych, zapiszemy powyższy laplasjan w postaci prawdziwej dla dowolnego układu współrzędnych

$$\Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{\mu\nu})}} \partial_\alpha \left(\sqrt{\det(g_{\mu\nu})} \partial^\alpha \phi \right) \quad (4.44)$$

gdzie

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial q^\alpha}, \quad \partial^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta. \quad (4.45)$$

Dla współrzędnych ortogonalnych

$$\partial^\alpha = \frac{1}{h_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial q^\alpha}. \quad (4.46)$$

Laplasjan w kilku wybranych współrzędnych krzywoliniowych jest podany w tabelce.

Współrzędne biegunowe	$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$
Współrzędne walcowe	$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Współrzędne sferyczne	$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$

Rozdział 5

Twierdzenia całkowe

5.1 Twierdzenie o potencjale

Będziemy rozpatrywać całki krzywoliniowe liczone wzdłuż krzywej C w przestrzeni trójwymiarowej,

$$I(C) = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}, \quad (5.1)$$

gdzie $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ jest funkcją (polem) wektorowym, natomiast $d\vec{r}$ jest infinytezymalnym wektorem łączącym dwa nieskończenie bliskie sobie punkty na krzywej. We współrzędnych kartezjańskich

$$I(C) = \int_C (A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3). \quad (5.2)$$

Zauważmy, że zmieniając kierunek całkowania na przeciwny, czyli formalnie przechodząc od krzywej $C \rightarrow -C$, otrzymujemy wartość całki ze zmienionym znakiem,

$$I(-C) = -I(C). \quad (5.3)$$

Wartość całka krzywoliniowej na ogół zależy od krzywej C . Istnieje jednak przypadek, gdy tak nie jest. Jeżeli pole \vec{A} jest *polem potencjalnym* , tzn. można je przedstawić jako gradient z funkcji $\phi = \phi(\vec{r})$ (potencjału),

$$\vec{A} = \nabla\phi, \quad (5.4)$$

otrzymujemy

$$\boxed{\int_C \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}_B) - \phi(\vec{r}_A)} \quad (5.5)$$

gdzie \vec{r}_A to położenie początku krzywej C , natomiast \vec{r}_B to położenie jej końca. Krzywa C może więc być dowolną krzywą łączącą te punkty, a wartość całki krzywoliniowej I zależy tylko od wartości potencjału ϕ na brzegach tej krzywej. W szczególności dla krzywej zamkniętej, gdy $\vec{r}_A = \vec{r}_B$, otrzymujemy

$$\oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.6)$$

Tak więc, dla pola potencjalnego całka po krzywej zamkniętej wynosi zero.

Ćwiczenie - Pokazać, że pole wektorowe

$$\vec{E} = \frac{\kappa}{r^2} \hat{r}, \quad \hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad (5.7)$$

gdzie κ jest stałą, a \hat{r} jest jednostkowym wektorem wodzącym, jest polem potencjalnym. Znaleźć postać potencjału.

5.2 Twierdzenie Stokesa

Rozważmy całkę krzywoliniową po krzywej zamkniętej

$$I(C) = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (5.8)$$

Pokażemy, że można ją wyrazić poprzez całkę po dowolnej powierzchni dwuwymiarowej S rozpiętej na krzywej C .

Niech S będzie taką powierzchnią. Można ją przybliżyć przez sumę infinitezmalnych powierzchni dwuwymiarowych, które są na tyle małe, iż można je traktować jako powierzchnie płaskie. Ich brzegi są infinitezmalnymi krzywymi zamkniętymi po których całkujemy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Całki po części wewnętrznych krzywych znoszą się dla sąsiadujących ze sobą powierzchni, gdyż całkowanie po wspólnej części krzywej odbywa się dwa razy w przeciwnych kierunkach. To co pozostaje to całka po brzegu obszaru dwuwymiarowego S , czyli całka po krzywej C . Tak więc, należy najpierw rozpatrzyć wkład od infinitezmalnej krzywej otaczającej obszar płaski, a następnie dodać wkłady od wszystkich takich całek by otrzymać całkę $I(C)$.

Niech taką krzywą będzie prostokąt o bokach o długości Δx i Δy położony na płaszczyźnie (x, y) , tak, że jego środek znajduje się w punkcie $(0, 0)$ kartezjańskiego układu współrzędnych. Policzmy całkę po brzegu tego prostokąta w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, mnożąc długość boku przez wartość odpowiedniej składowej

poła wektorowego \vec{A} w środku tego boku. Dla obliczenia tej wartości posłużymy się rozwinięciem Taylora z dokładnością do wyrazów liniowych w przyrostach,

$$\vec{A}(x \pm \Delta x/2, y \pm \Delta y/2) = \vec{A} \pm \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \pm \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}. \quad (5.9)$$

gdzie pole wektorowe i jego pochodne po prawej stronie są obliczone w początku układu kartezjańskiego, $\vec{A} = \vec{A}(0, 0)$. Oznaczając infinitezmalny prostokąt przez ΔC , mamy

$$I(\Delta C) = \oint_{\Delta C} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{(-\Delta x/2, -\Delta y/2)}^{(\Delta x/2, -\Delta y/2)} + \int_{(\Delta x/2, -\Delta y/2)}^{(\Delta x/2, \Delta y/2)} + \int_{(\Delta x/2, \Delta y/2)}^{(-\Delta x/2, \Delta y/2)} + \int_{(-\Delta x/2, \Delta y/2)}^{(-\Delta x/2, -\Delta y/2)}, \quad (5.10)$$

gdzie symbolicznie zaznaczyliśmy cztery fragmenty konturu całkowania. Tak więc

$$I(\Delta C) = \left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} & - \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta x - \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \\ & = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \end{aligned} \quad (5.12)$$

W wyrażeniu w nawiasie rozpoznajemy z-tową składową rotacji $(\nabla \times \vec{A})_z$. Wprowadzając wektor powierzchni o długości równej liczbowo polu powierzchni i prostopadły do niej o kierunku określanym przez regułę prawej ręki,

$$\Delta \vec{S} = (0, 0, \Delta x \Delta y), \quad (5.13)$$

całkę $I(\Delta C)$ możemy zapisać w postaci niezależnej od orientacji powierzchni

$$I(\Delta C) = \text{rot} \vec{A} \cdot \Delta \vec{S}. \quad (5.14)$$

Sumując po wszystkich wkładach ΔC otrzymujemy całkę konturową $I(C)$.

Stąd twierdzenie Stokesa

$$\boxed{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}} \quad (5.15)$$

gdzie S jest dowolną powierzchnią rozpiętą na krzywej C . Oznacza to, że powyższa relacja nie zależy od kształtu powierzchni S . Twierdzenie Stokesa wiąże całkę po powierzchni S

z rotacji pola wektorowego \vec{A} z całką krzywoliniową z pola \vec{A} po brzegu tej powierzchni C . Jest to bardzo głęboki matematycznie wynik.

Jeżeli $\text{rot}\vec{A} = \vec{0}$ to całka po *każdej* krzywej zamkniętej C znika,

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C. \quad (5.16)$$

Jest to zgodne z faktem, że w przy znikającej rotacji pole \vec{A} jest polem potencjalnym, a więc słuszna jest relacja (5.6).

5.3 Twierdzenie Gaussa

Podobną matematycznie relację do twierdzenia Stokesa można otrzymać rozważając wypływ (strumień) pola wektorowego \vec{A} poprzez powierzchnie *zamkniętą* S . Rozważamy zatem całkę powierzchniową

$$I(S) = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}, \quad (5.17)$$

gdzie różniczka $d\vec{s}$ jest inifinitezmalnym elementem powierzchni, prostopadłym do niej i skierowanym na zewnątrz w przypadku powierzchni zamkniętej. Pokażemy, że $I(S)$ można wyrazić przez całkę po objętości ograniczonej powierzchnią zamkniętą S .

Niech V będzie taką objętością. Można ją przybliżyć przez sumę inifinitezmalnych prostopadłościanów. Licząc strumień pola \vec{A} poprzez ścianki tych prostopadłościanów stwierdzamy, że strumienie poprzez ścianki wewnętrzne kasują się dla przylegających do siebie prostopadłościanów, gdyż jeśli z punktu widzenia jednego z nich strumień do niego dopływa, to dla jego sąsiada strumień z niego wypływa. To co pozostaje to strumień poprzez ścianki zewnętrzne, które w granicy stanowią powierzchnię S . Należy zatem policzyć strumienie pochodzące od każdego prostopadłościanu, a następnie je dodać by otrzymać całkę powierzchniową $I(S)$.

Rozpatrzmy zatem prostopadłościan o bokach o długości $\Delta x, \Delta y$ i Δz , taki, że jego środek leży w punkcie $(0, 0, 0)$ kartezjańskiego układu współrzędnych. Posłużymy się rozwinięciem Taylora wokół środka prostopadłościanu,

$$\vec{A}(\pm\Delta x/2, \pm\Delta y/2, \pm\Delta z/2) = \vec{A} \pm \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \pm \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \pm \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}, \quad (5.18)$$

gdzie pole wektorowe i jego pochodne są obliczone w punkcie $(0, 0, 0)$. Zatem znajdujemy

dla małego prostopadłościanu ΔV ,

$$\begin{aligned}
 I(\Delta V) &= \oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{s} & (5.19) \\
 &= \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta z \Delta x + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y \\
 &\quad - \left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta z \Delta x - \left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y
 \end{aligned}$$

co daje

$$I(\Delta V) = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \operatorname{div} \vec{A} \Delta V. \quad (5.20)$$

Sumując po sześcianach otrzymujemy całkę powierzchniową $I(S)$.

Stąd twierdzenie Gaussa

$$\boxed{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV} \quad (5.21)$$

gdzie V jest objętością ograniczoną przez zamkniętą powierzchnię S . Twierdzenie Greena wiąże całkę objętościową z dywergencji pola wektorowego \vec{A} ze strumieniem tego pola poprzez powierzchnię S będącą brzegiem obszaru V . Jest to głęboki matematycznie wynik.

Jeżeli $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, czyli pole \vec{A} jest bezźródłowe, to strumień tego pola poprzez *dowolną zamkniętą powierzchnię* S wynosi zero,

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall S. \quad (5.22)$$

5.4 Podsumowanie

Podsumowując, przedstawione twierdzenia pokazują, że operacja różniczkowania i wzięcia brzegu obszaru są ze sobą powiązane. Wprowadzając bowiem operację wzięcia brzegu ∂ dla krzywej C , powierzchni S i objętości V ,

$$\partial C = \{A, B\}, \quad \partial S = C, \quad \partial V = S \quad (5.23)$$

możemy zapisać omówione twierdzenia tak jak w tabelce.

Twierdzenie o gradiencie	$\int_C (\nabla\phi) \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$
Twierdzenie Stokesa	$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$
Twierdzenie Gaussa	$\int_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{s}$

Rozdział 6

Równania Maxwella

Podstawą elektrodynamiki klasycznej są równania Maxwella, które wiążą pola elektryczne \vec{E} i magnetyczne \vec{B} ze sobą oraz z ładunkami i prądami elektrycznymi. Pola \vec{E} i \vec{B} są funkcjami wektorowymi zależnymi od położenia $\vec{r} = (x, y, z)$ i czasu t ,

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t). \quad (6.1)$$

6.1 Pierwsza para

Pierwsza, tak zwana bezźródłowa, para równań Maxwella to

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = \vec{0}} \quad (6.2)$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (6.3)$$

gdzie c jest stałą o wymiarze prędkości, którą okazuje się być prędkość światła w próżni.

Zauważmy że drugie równanie jest warunkiem konsystencji dla pierwszego, gdyż stosując operator dywergencji do obu stron równania (6.3) otrzymujemy na mocy własności $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = -c \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (6.4)$$

Tak więc, jeżeli równanie (6.2) jest spełnione dla pewnej chwili czasu t_0 to jest słuszne dla dowolnych innych chwil czasu.

Równanie (6.2) mówi, że pole magnetyczne \vec{B} jest polem bezźródłowym. Definiując bowiem strumień pola magnetycznego przez dowolną powierzchnię *zamkniętą* S ,

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (6.5)$$

i stosując twierdzenie Gaussa, otrzymujemy na podstawie równania (6.2)

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0. \quad (6.6)$$

Oznacza to, że strumień pola magnetycznego Φ_B znika dla dowolnej *powierzchni zamkniętej*,

$$\boxed{\Phi_B = 0} \quad (6.7)$$

gdyż nie ma izolowanych źródeł pola magnetycznego - monopoli magnetycznych.

Równanie (6.3) stwierdza, że zmiennemu w czasie polu magnetycznemu towarzyszy wirowe pole elektryczne, któremu się przeciwstawia (znak minus - reguła Lenza). Całkując obustronnie równanie (6.3) po dowolnej *niezamkniętej* powierzchni S z brzegiem będącym krzywą zamkniętą C , otrzymujemy

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}. \quad (6.8)$$

Całka po prawej stronie to strumień pola magnetycznego Φ_B przez powierzchnię niezamkniętą S , natomiast wyrażenie po lewej stronie prowadzi na podstawie twierdzenia Stokesa do nieznikającej całki po krzywej zamkniętej C ,

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (6.9)$$

Całka ta nazywa się *siłą elektromotoryczną* \mathcal{E} ,

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (6.10)$$

Tak więc, zmienny w czasie strumień pola magnetycznego przez powierzchnię S prowadzi do powstania siły elektromotorycznej wzdłuż konturu C będącym brzegiem tej powierzchni,

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_B}{dt}} \quad (6.11)$$

Jest to treść prawa Faradaya w wersji całkowitej. Zwróćmy uwagę, że dla ustalonej krzywej C (siły elektromotorycznej) strumień pola magnetycznego jest niezależny od powierzchni S rozpiętej na tej krzywej.

Brak zmiennego w czasie pola magnetycznego powoduje, że pole elektryczne staje się bezwirowe,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}. \quad (6.12)$$

Z tożsamości $\text{rot grad} = \vec{0}$ wynika, że jest ono wtedy polem potencjalnym,

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi, \quad (6.13)$$

dla którego siła elektromotoryczna znika, $\mathcal{E} = 0$.

6.2 Druga para

Druga para równań Maxwella zawiera ładunki i prądy po prawej stronie

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho \quad (6.14)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (6.15)$$

gdzie $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ jest gęstością ładunków elektrycznych w przestrzeni, natomiast $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$ jest gęstością prądów elektrycznych. Wielkość

$$Q = \int_V \rho dV \quad (6.16)$$

to całkowity ładunek elektryczny Q zawarty w objętości V . Natomiast

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad (6.17)$$

to prąd elektryczny I przepływający przez powierzchnię S .

Równanie (6.14) prowadzi do wniosku, że ładunki elektryczne są źródłem pola elektrycznego. Całkując to równanie po objętości V i wykorzystując twierdzenia Gaussa, otrzymujemy

$$\int_V \text{div } \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi Q. \quad (6.18)$$

Całka powierzchniowa to *strumień pola elektrycznego* Φ_E przez zamkniętą powierzchnię S . Stąd całkowita postać równania (6.14),

$$\Phi_E = 4\pi Q \quad (6.19)$$

Otrzymaliśmy *prawo Gaussa* - strumień pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię jest proporcjonalny do całkowitego ładunku elektrycznego zawartego w obszarze ograniczonym tą powierzchnią.

Zapiszmy równanie (6.15) w postaci

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (6.20)$$

Widzimy, że wirowe pole magnetyczne pojawia się w wyniku przepływu ładunków (prądu \vec{j}) oraz zmiennego w czasie pola elektrycznego \vec{E} . Wielkość

$$\vec{j}_{\text{przes}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.21)$$

nazywa się *prądem przesunięcia*. Równanie (6.20) przyjmuje wtedy postać

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{\text{przes}}). \quad (6.22)$$

Prąd przesunięcia wprowadził Maxwell dla wzajemnej konsystencji równań pola elektromagnetycznego. Całkując obustronnie równanie (6.20) po *niezamkniętej* powierzchni S , otrzymujemy

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (6.23)$$

Pierwsza całka po prawej stronie to natężenie prądu I przepływającego przez powierzchnię S , natomiast druga całka to strumień pola elektrycznego przez tę powierzchnię Φ_E . Korzystając następnie z twierdzenia Stokesa dla całki po lewej stronie,

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r}, \quad (6.24)$$

otrzymujemy

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d\Phi_E}{dt}} \quad (6.25)$$

gdzie krzywa C jest brzegiem obszaru S . Równanie (6.25) to całkowita postać prawa *Ampera-Maxwella* (6.20). Cyrkulacja pola magnetycznego pojawia się w wyniku przepływu prądu przez powierzchnię S oraz zmiennego w czasie strumienia pola elektrycznego przez tę powierzchnię. Ten ostatni wkład jest niezbędny do tego by prawo Ampera-Maxwella nie zależało od wyboru powierzchni S przy ustalonej krzywej zamkniętej C .

6.3 Równanie ciągłości

Gęstości ładunku elektrycznego ρ i prądu elektrycznego \vec{j} są powiązane ze sobą *równaniem ciągłości*,

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}} \quad (6.26)$$

Równanie ciągłości jest warunkiem, który muszą spełniać ρ i \vec{j} by można je było podstawić jako źródła pola elektromagnetycznego po prawej stronie drugiej pary równań Maxwella. Różniczkując bowiem po czasie równanie (6.14), a następnie wykorzystując równanie (6.15), znajdujemy

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} (c \operatorname{rot} \vec{B} - 4\pi \vec{j}) = -\operatorname{div} \vec{j}, \quad (6.27)$$

gdzie wykorzystaliśmy relację $\operatorname{div} \operatorname{rot} = \vec{0}$.

Równanie ciągłości (6.26) wyraża zasadę zachowania całkowitego ładunku obowiązującą w przyrodzie. Całkują je obustronnie po objętości V i korzystając z twierdzenia Gaussa, otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}. \quad (6.28)$$

Stąd równanie

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}. \quad (6.29)$$

Zmiana całkowitego ładunku w obszarze V jest więc związana z strumieniem gęstości prądu \vec{j} przez brzeg obszaru S . Zakładając, że dla $V \rightarrow \infty$ strumień ten dąży do zera, otrzymujemy zasadę zachowania całkowitego ładunku

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = 0} \quad (6.30)$$

6.4 Potencjały elektromagnetyczne

Beźródłowe równanie Maxwella

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

oraz tożsamość $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \vec{0}$ prowadzą do wniosku, że w tzw. obszarach jednorodnych (bez dziur lub wyłączonych z rozważań punktów) pole magnetyczne może być przedstawione jako rotacja *wektorowego potencjału magnetycznego* $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$,

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}} \quad (6.31)$$

Podstawiając tę relację do drugiego beźródłowego równania Maxwella, mamy

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}. \quad (6.32)$$

Z tożsamości $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ wynika, że w obszarach jednorodnych kombinacja pola elektrycznego i potencjału magnetycznego w nawiasie w równaniu powyżej może być przedstawiona jako (minus) gradient ze *skalarne go potencjału elektrycznego* $\phi = \phi(\vec{r}, t)$. Stąd

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (6.33)$$

Potencjał elektryczny $\phi(\vec{r}, t)$ nie należy utożsamiać z potencjałem elektrostatycznym $\phi(\vec{r})$, gdyż w przeciwieństwie do tego ostatniego może on zależeć od czasu.

Podsumowując, sześć składowych pól elektromagnetycznych \vec{E} i \vec{B} może być wyrażone przez cztery składowe potencjałów elektromagnetycznych (ϕ, \vec{A}) .

6.5 Transformacja cechowania

Potencjały elektromagnetyczne nie są określone jednoznacznie. Można dokonać *transformacji cechowania* potencjałów, która nie zmienia pól elektromagnetycznych,

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} - \nabla f \\ \phi' &= \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}} \quad (6.34)$$

gdzie $f = f(\vec{r}, t)$ jest dowolną różniczkowalną funkcją. Mamy bowiem dla pola magnetycznego

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} - \nabla f) = \nabla \times \vec{A} - \nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (6.35)$$

oraz dla pola elektrycznego

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\nabla\phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} - \nabla f) \\ &= -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(-\nabla f + \nabla f) = \vec{E}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Transformację cechowania (6.34) można użyć do dalszej redukcji liczby niezależnych funkcji służących do opisu pól elektromagnetycznych.

Ze względu na transformację cechowania, potencjały elektromagnetyczne nie są bezpośrednio mierzalne, tak jak klasyczne pola elektromagnetyczne. Ich pełne, fundamentalne znaczenie ujawnia się dopiero w mechanice kwantowej. Prowadzą one do mierzalnych efektów, na przykład w rozpraszaniu cząstek naładowanych na nieskończenie cienkim selenoidzie (efekt Aharonova-Bohma).

Uogólnienie transformacji cechowania (6.34) na przypadek tzw. nieabelowych pól cechowania jest podstawą konstrukcji współczesnych teorii cząstek elementarnych i ich oddziaływań.

6.6 Podsumowanie

Równania Maxwella, zapisanych w układzie jednostek CGS, podsumowuje tabela.

Postać różniczkowa	Postać całkowa	Uwagi
$\nabla \cdot \vec{B} = \vec{0}$	$\Phi_B = 0$	Brak monopoli magnetycznych
$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$	$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_B}{dt}$	Prawo Faradaya
$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	$\Phi_E = 4\pi Q$	Prawo Gaussa
$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d\Phi_E}{dt}$	Prawo Ampera-Maxwella

gdzie

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (6.37)$$

jest siłą elektromotoryczną w zamkniętym obwodzie C , natomiast

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (6.38)$$

są odpowiednio strumieniami pola elektrycznego i magnetycznego przez zamkniętą powierzchnię S .

Rozdział 7

Równanie falowe

7.1 Fale elektromagnetyczne

W obszarach wolnych od ładunków i prądów pola elektromagnetyczne \vec{E} i \vec{B} spełniają równanie falowe. Pozwala to zinterpretować falę świetlną jako układ pól elektromagnetycznych propagujących się z prędkością równą prędkości światła.

Różniczkując po czasie z czynnikiem $1/c$ obie strony bezźródłowego równania Maxwella

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.1)$$

otrzymujemy po przeniesieniu wyrażen na lewą stronę

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \nabla \times \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{0}. \quad (7.2)$$

Korzystając z równania Maxwella w obszarze wolnym od prądów ($\vec{j} = \vec{0}$),

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = \vec{0}, \quad (7.3)$$

wyrazimy pierwszą pochodną pola elektrycznego w równaniu (7.2) przez rotację pola magnetycznego, otrzymując

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \vec{0}. \quad (7.4)$$

Korzystając następnie z tożsamości

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \quad (7.5)$$

oraz równania Maxwella

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (7.6)$$

znajdujemy **równanie falowe** dla swobodnego pola magnetycznego

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \Delta \vec{B} = \vec{0}} \quad (7.7)$$

gdzie $\Delta = \nabla^2$ jest trójwymiarowym laplasjanem Podobnie można otrzymać równanie falowe dla swobodnego pola elektrycznego, wykorzystując prawo Gaussa, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, w obszarze wolnym od ładunków elektrycznych ($\rho = 0$),

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \vec{0}} \quad (7.8)$$

Wprowadzając operator d'Alemberta (dalembercjana),

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (7.9)$$

oba równania falowe można zapisać w postaci

$$\square \vec{E} = \vec{0}, \quad \square \vec{B} = \vec{0}. \quad (7.10)$$

Równania (7.10) opisują propagację pól elektromagnetycznych z prędkością równą współczynnikowi c . Rozważając dla uproszczenia ruch jednej ze składowych pól (nazwijmy ją u) w kierunku osi \hat{x} , otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (7.11)$$

Równanie to ma dwa niezależne rozwiązania, które można dodać do siebie ze względu na liniowość równania,

$$u(x, t) = u_1(x - ct) + u_2(x + ct), \quad (7.12)$$

gdzie kształty funkcji u_1 oraz u_2 są dowolne. Pierwsze rozwiązanie opisuje ruch fali u_1 w kierunku $+\hat{x}$ z prędkością c bez zmiany kształtu, natomiast drugie rozwiązanie opisuje analogiczny ruch fali u_2 w kierunku $-\hat{x}$. Z doświadczenia, prędkość c fali elektromagnetycznej jest równa prędkości światła. W próżni

$$c = 299\,792,458 \text{ km/s}. \quad (7.13)$$

7.2 Monochromatyczna fala płaska

W dużej odległości od źródła fala elektromagnetyczna jest falą płaską postaci

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}).\end{aligned}\quad (7.14)$$

Wektory \vec{E}_0 i \vec{B}_0 nazywamy **amplitudą** fali, natomiast ω jest **częstością kątową** fali, a \vec{k} jej **wektorem falowym**. Częstość katowa ω jest związana z częstością drgań fali ν , natomiast długość wektora falowego z długością fali

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (7.15)$$

Powierzchnie stałej wartości pól elektromagnetycznych dla ustalonej chwili czasu są zadane żądaniem stałości fazy funkcji cosinus, czyli relacją

$$\omega t_0 - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.} \quad (7.16)$$

Jest to równanie płaszczyzny wyznaczonej przez prostopadły do niej wektor falowy \vec{k} ,

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const} - \omega t_0. \quad (7.17)$$

Stąd nazwa fala płaska. Wektor falowy wyznacza kierunek rozchodzenia się fali płaskiej. Fala jest monochromatyczna, gdyż mamy do czynienia tylko z jedną częstością ω .

Po podstawieniu któregośkolwiek z wyrażen (7.14) do równania falowego, na przykład dla pola elektrycznego, otrzymujemy

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2\right) \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \vec{0}. \quad (7.18)$$

Aby to równanie było słuszne dla dowolnego czasu i położenia musi być spełniona **relację dyspersyjną** między częstością kątową a wektorem falowym

$$\boxed{\omega = c|\vec{k}|} \quad (7.19)$$

Prawo Gaussa dla pola elektrycznego i magnetycznego prowadzi do wniosku, że wektor falowy jest prostopadły do obu pól fali płaskiej

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0} \quad (7.20)$$

Oznacza to, że fala elektromagnetyczna jest **falą poprzeczną**. Prawo Faradaya daje natomiast warunek

$$\boxed{\vec{B} = \hat{k} \times \vec{E}} \quad (7.21)$$

gdzie $\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}|$ jest jednostkowym wektorem falowym. Wynika stąd, że pola \vec{E} i \vec{B} są do siebie prostopadłe i mają tę samą długość

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0, \quad |\vec{E}| = |\vec{B}|. \quad (7.22)$$

Identyczne rozumowanie można przeprowadzić dla rozwiązania równania falowego w postaci fali płaskiej (7.14) z funkcjami sinus.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Obie te postaci można dodać do siebie otrzymując najogólniejszą postać monochromatycznej fali płaskiej,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_{01} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \vec{E}_{02} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{B} &= \vec{B}_{01} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \vec{B}_{02} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}), \end{aligned} \quad (7.24)$$

gdzie uwzględniliśmy fakt, że rozwiązania szczególne nie muszą mieć tych samych amplitud. Relacja dyspersji (7.19) oraz warunki poprzeczności (7.20)-(7.21) dla sumarycznych pól pozostają niezmiennione.

7.3 Zasada superpozycji fal

Możliwość dodania do siebie dwóch liniowo niezależnych fal płaskich, prowadząca do równań (7.24), jest przykładem *zasady superpozycji*, którą spełniają rozwiązania równań Maxwella bez prądów i ładunków. Jeżeli dwa pola elektromagnetyczne są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równań Maxwella to ich suma też jest rozwiązaniem.

Własność ta wynika z własności liniowości swobodnych równań Maxwella, gdyż wszystkie operatory różniczkowe w tych równaniach są operatorami liniowymi. Na przykład, dla dywergencji mamy

$$\nabla \cdot (a\vec{E}_1 + b\vec{E}_2) = a(\nabla \cdot \vec{E}_1) + b(\nabla \cdot \vec{E}_2), \quad (7.25)$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi. W szczególności, jeżeli pola elektryczne \vec{E}_1 i \vec{E}_2 są rozwiązaniami równania falowego,

$$\square \vec{E}_1 = \vec{0}, \quad \square \vec{E}_2 = \vec{0}, \quad (7.26)$$

to ich suma też jest rozwiązaniem tego równania,

$$\square (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \vec{0}. \quad (7.27)$$

Wychodząc bowiem od lewej strony równania (7.27), otrzymujemy

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)}{\partial t^2} - \Delta (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \left\{ \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}_1 \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}_2 \right\} = \vec{0}. \quad (7.28)$$

Zasada superpozycji pozwala dodawać do siebie monochromatyczne fale płaskie (7.24) o różnych wektorach falowych,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \left\{ \vec{E}_{01}(\vec{k}) \cos(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \vec{E}_{02}(\vec{k}) \sin(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right\} \quad (7.29)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \left\{ \vec{B}_{01}(\vec{k}) \cos(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r}) + \vec{B}_{02}(\vec{k}) \sin(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right\}, \quad (7.30)$$

gdzie częstość $\omega_k = c|\vec{k}|$. Amplitudy \vec{E}_{0i} oraz \vec{B}_{0i} ($i = 1, 2$) zależą od wektora falowego \vec{k} oraz spełniają warunki poprzeczności dla ustalonego wektora falowego,

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_{0i} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_{0i} = 0, \quad \vec{B}_{0i} = \hat{k} \times \vec{E}_{0i}. \quad (7.31)$$

Równania (7.30) są przykładem **analizy Fouriera** pól elektromagnetycznych. Zbiór dopuszczalnych wektorów falowych \vec{k} zależy od warunków brzegowych nałożonych na te pola.

7.4 Interferencja fal

Zasada superpozycji prowadzi do obserwowanego doświadczalnie zjawiska *interferencji* fal elektromagnetycznych. Natężenie światła I jest proporcjonalne do kwadratu pola elektrycznego,

$$I = a \vec{E}^2, \quad (7.32)$$

gdzie a jest stałą. Stąd dla superpozycji dwóch fal otrzymujemy

$$I = a (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = a (\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi. \quad (7.33)$$

Natężenie wypadkowe nie jest sumą natężeń, $I \neq I_1 + I_2$. Suma ta jest wzmacniana lub osłabiana w zależności do wartości cosinusa. W ogólności,

$$I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} < I < I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}. \quad (7.34)$$

Analogiczna własność interferencji gęstości prawdopodobieństw obowiązuje w mechanice kwantowej. Wynika ona z liniowości podstawowego równania mechaniki kwantowej, równania Schrodingera, dla amplitud prawdopodobieństw.

Rozdział 8

Analiza fourierowska

8.1 Rozwinięcie w szereg Fouriera

Rozważmy funkcję rzeczywistą f określoną na okręgu o promieniu jednostkowym. Parametryzując okrąg przy pomocy kąta $\phi \in [0, 2\pi]$ otrzymujemy funkcję $y = f(\phi)$, gdzie żądamy by

$$f(0) = f(2\pi). \quad (8.1)$$

Tym samym można rozszerzyć funkcję f na całą oś rzeczywistą \mathbb{R} , czyniąc z niej funkcję okresową o okresie 2π . Przykładem takich funkcji są

$$\sin(n\phi), \quad \cos(n\phi), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.2)$$

Okazuje się, że szeroką klasę funkcji określonych na okręgu można rozwinąć w *szereg Fouriera* powyższych funkcji

$$f(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)\} \quad (8.3)$$

Współczynniki rozwinięcia policzymy wykorzystując warunki ortogonalności dla funkcji trygonometrycznych (8.2)

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\phi) \sin(m\phi) d\phi = \pi \delta_{nm} \quad (8.4)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\phi) \cos(m\phi) d\phi = \pi \delta_{nm} \quad (8.5)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\phi) \cos(m\phi) d\phi = 0, \quad (8.6)$$

gdzie $n, m \in \mathbb{N}$. Warunki te udowodnimy wykorzystując tożsamości trygonometryczne

$$\begin{aligned}\sin(n\phi)\sin(m\phi) &= \frac{1}{2} \{\cos((n-m)\phi) - \cos((n+m)\phi)\} \\ \cos(n\phi)\cos(m\phi) &= \frac{1}{2} \{\cos((n-m)\phi) + \cos((n+m)\phi)\} \\ \sin(n\phi)\cos(m\phi) &= \frac{1}{2} \{\sin((n-m)\phi) + \sin((n+m)\phi)\}.\end{aligned}\quad (8.7)$$

Dla całki (8.4) otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\phi)\sin(m\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((n-m)\phi) d\phi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((n+m)\phi) d\phi = \pi\delta_{nm},$$

gdyż ze względu na całkowanie po pełnym okresie funkcji cosinus jedynie pierwsza całka po prawej stronie jest różna od zera dla $n = m$, dając wynik $(2\pi)/2 = \pi$. Podobnie można udowodnić wzór (8.5) oraz (8.6). W ostatnim przypadku otrzymujemy jako wynik całkowania zero, gdyż $\sin((n-m)\phi) = 0$ dla $n = m$.

Wracając do wzoru (8.3), współczynnik a_0 wyliczymy całkując obustronnie po kącie ϕ w pełnym jego zakresie. Otrzymamy

$$\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} d\phi = \pi a_0, \quad (8.8)$$

gdyż pozostałe całki z funkcji trygonometrycznych po prawej stronie znikają. Stąd

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi} \quad (8.9)$$

Mnożąc obie strony równania (8.3) przez $\cos(m\phi)$ i całkując po pełnym okresie, znajdujemy po skorzystaniu z warunków ortogonalności

$$\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos(m\phi) d\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \cos(n\phi)\cos(n\phi) d\phi = \pi a_m. \quad (8.10)$$

Stąd po zamianie m na n , otrzymujemy

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi)\cos(n\phi) d\phi} \quad (8.11)$$

Zauważmy, że wzór (8.9) można otrzymać z równania (8.11) kładąc w nim $n = 0$. Mnożąc na koniec obie strony równania (8.3) przez $\sin(n\phi)$ i całkując po kącie ϕ , znajdujemy po wykorzystaniu warunków ortogonalności

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin(n\phi) d\phi \quad (8.12)$$

Wzory (8.11) i (8.12) dla $n = 0, 1, 2, \dots$ pozwalają wyliczyć współczynniki rozwinięcia funkcji $y = f(\phi)$ w szereg Fouriera (8.3).

Ćwiczenie - Udowodnić równość Parsevala

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(\phi) d\phi = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n^2 + b_n^2\} \quad (8.13)$$

Uwagi

1. Funkcja $y = f(\phi)$ nie musi być ciągła w każdym punkcie okręgu. Jeśli posiada ona skończoną liczbę punktów nieciągłości ϕ_i w których ma granice, lewostronną $f(\phi_{i-})$ i prawostronną $f(\phi_{i+})$, oraz jest różniczkowalna w sposób ciągły pomiędzy tymi punktami to szereg Fouriera jest zbieżny punktowo do wartości funkcji $f(\phi)$ w punktach ciągłości, natomiast w punktach nieciągłości jest zbieżny do wartości średniej

$$\frac{f(\phi_{i-}) + f(\phi_{i+})}{2}. \quad (8.14)$$

2. Zbieżność punktowa oznacza, że ciąg sum częściowych szeregu Fouriera,

$$S_N(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \{a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)\}, \quad (8.15)$$

ma granicę dla ustalonej wartości ϕ . Na przykład, w punktach ciągłości funkcji f

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\phi) = f(\phi), \quad (8.16)$$

natomiast w punktach nieciągłości ϕ_i

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\phi_i) = \frac{f(\phi_{i-}) + f(\phi_{i+})}{2}. \quad (8.17)$$

3. Czasami wygodniej jest rozpatrywać parametryzację okręgu dla

$$\phi \in [-\pi, \pi] \quad (8.18)$$

z warunkiem $f(-\pi) = f(\pi)$ dla funkcji określonych na okręgu. W przypadku rozwinięcia funkcji o parzystości dodatniej,

$$f(-\phi) = f(\phi), \quad (8.19)$$

otrzymujemy szereg Fouriera wyłącznie z funkcjami cosinus i stałym współczynnikiem a_0 , natomiast dla funkcji nieparzystych,

$$f(-\phi) = -f(\phi), \quad (8.20)$$

szereg Fouriera ma wyłącznie wyrazy z funkcjami sinus.

Ćwiczenie - Znaleźć współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji

$$f(\phi) = \begin{cases} \phi & \text{dla } \phi \in [-\pi, \pi) \\ -\pi & \text{dla } \phi = \pi. \end{cases} \quad (8.21)$$

Pokazać przy pomocy wzoru Parsevala, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (8.22)$$

Pokazać, że w punkcie nieciągłości $\phi = \pi$ słuszny jest wzór (8.14).

8.2 Analiza czasowa

Rozważmy okresową funkcję czasu $y = f(t)$ o okresie T . Oznacza to, że

$$f(t + T) = f(t) \quad (8.23)$$

dla każdej ustalonej chwili czasu t . Wybierając $t = 0$, otrzymujemy warunek analogiczny do warunku (8.1)

$$f(0) = f(T). \quad (8.24)$$

Skorzystamy więc z ogólnych wyników poprzedniego rozdziału dla skonstruowania szeregu Fouriera dla funkcji okresowych w czasie.

W tym celu wykorzystamy liniową i wzajemnie jednoznaczną transformację przedziału czasu $[0, T]$ do przedziału kąta $[0, 2\pi]$,

$$\phi = \frac{2\pi}{T}t. \quad (8.25)$$

Zauważmy, że $\phi(0) = 0$ a $\phi(T) = 2\pi$. Po podstawieniu relacji odwrotnej do funkcji $f(t)$ otrzymujemy funkcję kąta ϕ ,

$$\tilde{f}(\phi) = f(t = T\phi/2\pi), \quad (8.26)$$

którą możemy rozwinąć w szereg Fouriera

$$\tilde{f}(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)\}. \quad (8.27)$$

Powracając do funkcji $f(t)$ poprzez podstawienie (8.25), otrzymamy

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\}} \quad (8.28)$$

gdzie wprowadziliśmy *częstość kątową*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (8.29)$$

Jest to prędkość kątowa ruchu jednostajnego punktu po okręgu. Jego współrzędne zmieniają się zgodnie ze wzorami

$$x = \cos(\omega t), \quad y = \sin(\omega t). \quad (8.30)$$

Taką zależność od czasu nazywamy *ruchem harmonicznym*. Ze wzoru (8.28) widzimy, że okresowa funkcja czasu może być przedstawiona jako superpozycja (kombinacja liniowa) ruchów harmonicznycch o nieskończenie wielu częstościach będących wielokrotnością częstości podstawowej ω ,

$$\omega_n = n\omega = \frac{2\pi n}{T}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.31)$$

Współczynniki rozwinięcia są ilościową miarą wkładu ruchów harmonicznycch o danej częstości do sumy Fouriera. Łatwo je wyliczyć wychodząc ze wzorów (8.11) i (8.12)

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt} \quad (8.32)$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt} \quad (8.33)$$

Zgodnie z uwagą 3. przedział całkowania może być przesunięty do $[-T/2, T/2]$.

8.3 Analiza przestrzenna

Analogiczną konstrukcję można przeprowadzić w przestrzeni położenia w jednym wymiarze x dla funkcji okresowej $y = f(x)$ o okresie L . Wtedy

$$f(x+L) = f(x). \quad (8.34)$$

dla dowolnych wartości x . Wybierając $x = 0$ otrzymujemy warunek

$$f(0) = f(L), \quad (8.35)$$

który pozwala formalnie przepisać otrzymane rezultaty dla czasu, zastępując

$$t \rightarrow x, \quad T \rightarrow L. \quad (8.36)$$

Zamiast częstości ω wprowadza się jednowymiarowy wektor falowy

$$k = \frac{2\pi}{L}. \quad (8.37)$$

Rozwinięcie Fouriera przyjmuje wtedy postać

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nkx) + b_n \sin(nkx)\} \quad (8.38)$$

Dowolna funkcja okresowa jest superpozycją jednowymiarowych *fal płaskich*

$$\cos(k_n x), \quad \sin(k_n x), \quad (8.39)$$

gdzie k_n jest wektorem falowym fali, będącym wielokrotnością podstawowego wektora falowego k ,

$$k_n = nk = \frac{2\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.40)$$

Współczynniki Fouriera wylicza się ze wzoru

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(nkx) dx \quad (8.41)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(nkx) dx \quad (8.42)$$

Zgodnie z uwagą 3. przedział całkowania może być przesunięty do $[-L/2, L/2]$.

8.4 Drgająca struna

Rozpatrzmy drgania struny zamocowanej w punktach 0 i L . Oznacza to, że wychylenie struny $u(x)$ (podłużne lub poprzeczne) w punktach zamocowania wynosi zero w dowolnej chwili czasu,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (8.43)$$

Wychylenie spełnia równanie falowe (8.55), w którym współczynnik c wynosi

$$c = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}, \quad (8.44)$$

gdzie ϵ to współczynnik sprężystości, natomiast ρ to gęstość liniowa struny. Załóżmy, że obie te wielkości są stałe i nie zależą od x .

Podstawiając do równania (8.55) rozwiązanie próbne w postaci

$$u(x, t) = \tilde{u}(x) \cos(\omega t) \quad (8.45)$$

otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + k^2 \tilde{u} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (8.46)$$

Ogólne rozwiązanie tego równania to

$$\tilde{u}(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx). \quad (8.47)$$

Warunki brzegowe (8.43) prowadzą do wniosku

$$\tilde{u}(0) = B = 0 \quad (8.48)$$

$$\tilde{u}(L) = A \sin(kL) = 0. \quad (8.49)$$

Z ostatniego równania wynikają dyskretne wartości współczynnika k ,

$$kL = n\pi, \quad \Rightarrow \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad (8.50)$$

gdzie $n = 1, 2, \dots$. W konsekwencji, otrzymujemy dyskretne wartości dopuszczalnych częstości drgań

$$\omega_n = \frac{k_n}{c} = \frac{n\pi c}{L}. \quad (8.51)$$

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie w postaci drgań harmonicznym w przestrzeni i czasie,

$$u(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(\omega_n t). \quad (8.52)$$

Identyczne rozumowanie z funkcją sinus w rozwiązaniu próbnym (8.45) prowadzi do rozwiązania

$$u(x, t) = B \sin(k_n x) \sin(\omega_n t), \quad (8.53)$$

gdzie zmieniliśmy nazwę dowolnego współczynnika A na B . Stąd, ogólne rozwiązanie równania struny z zamocowanymi końcami jest superpozycją drgań harmonicznycch z amplitudami A_n i B_n , które mogą zależeć od modu drgań n ,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\} \sin(k_n x). \quad (8.54)$$

8.5 Równanie falowe w pudełku

Jako przykład zastosowania analizy fourierowskiej, rozwiążemy jednowymiarowe równanie falowe dla funkcji $u = u(x, t)$,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (8.55)$$

w ograniczonym obszarze przestrzeni, $x \in [0, L]$, z nałożonym *warunkiem brzegowym*

$$u(0, t) = u(L, t), \quad (8.56)$$

słusznym w każdej chwili czasu t . Otrzymane rozwiązanie można rozszerzyć na całą oś x posługując się warunkiem okresowości funkcji,

$$u(x + L, t) = u(x, t), \quad (8.57)$$

dla dowolnego x . Zwróćmy uwagę, że warunek brzegowy (8.56) prowadzi do wniosku

$$u(0, t) = u(nL, t), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.58)$$

Jest to model rozwiązania z *periodycznymi warunkami brzegowymi*, wykorzystywany intensywnie w szeregu działach fizyki.

Warunek (8.56) pozwala zapisać szukane rozwiązanie w postaci szeregu Fouriera (8.38)

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(t) \cos(nkx) + b_n(t) \sin(nkx)\} \quad (8.59)$$

gdzie współczynniki Fouriera zależą od czasu. Zwróćmy uwagę, że warunek brzegowy (8.56) jest przyczyną dla której dopuszczalne wartości wektorów falowych są dyskretne,

$$k_n = nk, \quad k = \frac{2\pi}{L}. \quad (8.60)$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$. Po podstawieniu (8.59) do równania (8.55) otrzymamy równania na współczynniki Fouriera

$$\begin{aligned} \ddot{a}_0 &= 0 \\ \ddot{a}_n &= -\omega_n^2 a_n \\ \ddot{b}_n &= -\omega_n^2 b_n \end{aligned} \quad (8.61)$$

gdzie podwójne kropki oznaczają drugą pochodną po czasie, natomiast

$$\omega_n = ck_n. \quad (8.62)$$

Łatwo sprawdzić, że ogólne rozwiązania tych równań to

$$\begin{aligned} a_0 &= A_0 + B_0 t \\ a_n &= A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \\ b_n &= C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t) \end{aligned} \quad (8.63)$$

Podstawiając je do równania (8.59), otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{A_0 + B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\} \cos(k_n x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n \cos(\omega_n t) + D_n \sin(\omega_n t)\} \sin(k_n x). \end{aligned} \quad (8.64)$$

Rozwiązanie zależne liniowo od czasu zwykle się pomija jako rosnące nieograniczenie w czasie. Porządkując pozostałe wyrażenia przy pomocy relacji (8.7), znajdujemy

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^{(+)} \cos(\omega_n t - k_n x) + B_n^{(+)} \sin(\omega_n t - k_n x) \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n^{(-)} \cos(\omega_n t + k_n x) + B_n^{(-)} \sin(\omega_n t + k_n x) \right\}, \end{aligned} \quad (8.65)$$

gdzie współczynniki $A_n^{(\pm)}$ i $B_n^{(\pm)}$ są kombinacjami liniowymi starych współczynników

$$A_n^{(\pm)} = \frac{A_n \pm D_n}{2}, \quad B_n^{(\pm)} = \frac{B_n \mp C_n}{2}. \quad (8.66)$$

Otrzymaliśmy superpozycję fal płaskich o dyskretnych wartościach wektora falowego, które poruszają się w kierunkach $\pm x$. Otrzymane rozwiązanie jest zgodne z ogólną postacią rozwiązania jednowymiarowego równania falowego z poprzedniego wykładu,

$$u(x, t) = u_1(x - ct) + u_2(x + ct), \quad (8.67)$$

gdych

$$\omega_n t \pm k_n x = \pm k_n (x \pm ct). \quad (8.68)$$

Rozdział 9

Transformata Fouriera

9.1 Zespólona postać szeregu Fouriera

Wyprowadźmy zespoloną postać szeregu Fouriera na przykładzie funkcji zależnych od położenia x ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)\}, \quad (9.1)$$

gdzie liczba falowa

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n. \quad (9.2)$$

Wykorzystując relacje

$$\cos(k_n x) = \frac{e^{ik_n x} + e^{-ik_n x}}{2}, \quad \sin(k_n x) = \frac{e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}}{2i}, \quad (9.3)$$

szereg Fouriera (9.1) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{2} (e^{ik_n x} + e^{-ik_n x}) + \frac{b_n}{2i} (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{ik_n x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-ik_n x} \right\}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Definiując następnie współczynniki

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} a_0 \\ c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ c_{-n} &= \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = c_n^* \end{aligned} \quad (9.5)$$

dostajemy

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{c_n e^{ik_n x} + c_{-n} e^{-ik_n x}\}. \quad (9.6)$$

Wykorzystując relację $k_{-n} = -k_n$, znajdujemy zespoloną formę szeregu Fouriera

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \quad (9.7)$$

Zespolone współczynniki rozwinięcia c_n obliczymy ze wzorów na współczynniki rzeczywiste a_n i b_n z przesuniętym przedziałem całkowania do $[-L/2, L/2]$,

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos(k_n x) dx - \frac{i}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin(k_n x) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \{\cos(k_n x) - i \sin(k_n x)\} dx \end{aligned} \quad (9.8)$$

co daje

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ik_n x} dx \quad (9.9)$$

Wzór ten jest słuszny dla wszystkich liczb całkowitych, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

9.2 Transformata Fouriera

Transformata Fouriera jest uogólnieniem szeregu Fouriera, gdy okres funkcji $f(x)$ dąży do nieskończoności ($L \rightarrow \infty$). Tym samym funkcja $f(x)$, określona na całej osi rzeczywistej \mathbb{R} , nie jest już funkcją okresową.

Wprowadźmy oznaczenie

$$\Delta k \equiv k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{L}. \quad (9.10)$$

Stąd relacja

$$k_n = \frac{2\pi n}{L} = n\Delta k. \quad (9.11)$$

Podstawiając ją do wzoru (9.9), w którym zamieniliśmy zmienną całkowania $x \rightarrow u$, dostaniemy

$$c_n = \frac{\Delta k}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta k}^{\pi/\Delta k} f(u) e^{-in\Delta k u} du. \quad (9.12)$$

Wstawiając c_n do równania (9.7), znajdujemy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\pi/\Delta k}^{\pi/\Delta k} f(u) e^{-i(n\Delta k)u} du \right\} e^{i(n\Delta k)x} \Delta k \quad (9.13)$$

Oznaczając funkcję w nawiasie przez

$$F(n\Delta k) = \int_{-\pi/\Delta k}^{\pi/\Delta k} f(u) e^{-i(n\Delta k)u} du, \quad (9.14)$$

otrzymujemy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta k) e^{i(n\Delta k)x} \Delta k. \quad (9.15)$$

W granicy $L \rightarrow \infty$, mamy $\Delta k \rightarrow 0$ i powyższa suma dąży do całki Riemanna,

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} F(k) e^{ikx}} \quad (9.16)$$

gdzie funkcja $F(k)$ jest granicą relacji (9.14) dla $\Delta k \rightarrow 0$,

$$\boxed{F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) e^{-iku}} \quad (9.17)$$

Wzór (9.17) to **transformata Fouriera** funkcji f , natomiast relacja (9.16) to transformata odwrotna. Wygodne jest następujące oznaczenie dla tych operacji całkowych

$$\mathcal{F}[f](k) = F(k), \quad \mathcal{F}^{-1}[F](x) = f(x). \quad (9.18)$$

Warunkiem wystarczającym istnienia transformaty Fouriera jest by $f(x)$ była kawałkami gładka na osi rzeczywistej oraz by funkcja $|f(x)|$ była całkowna od minus do plus nieskończoności.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (9.19)$$

9.3 Transformata Fouriera splotu funkcji

Zdefiniujmy splot dwóch funkcji $f(x)$ i $g(x)$ jako nową funkcję zadaną wzorem

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) g(x-u). \quad (9.20)$$

Policzmy następnie transformatę Fouriera splotu

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(f \star g)](k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (f \star g)(x) e^{-ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) g(x-u) \right\} e^{-ikx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} du f(u) e^{-iku} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x-u) e^{-ik(x-u)} \right\}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Dokonajmy zamiany zmiennej całkowania w drugiej całce w ostatniej linijce: $y = x - u$. Pozwala to wykonać tę całkę dla dowolnych wartości zmiennej u , dając transformatą Fouriera $G(k)$. Pozostała do wykonania całka po zmiennej u daje transformatę Fouriera $F(k)$. Stąd ostateczny wynik

$$\mathcal{F}[(f \star g)](k) = F(k)G(k). \quad (9.22)$$

Tak więc, transformata Fouriera splotu dwóch funkcji jest iloczynem ich transformat Fouriera.

9.4 Delta Diraca

Podstawiając transformatę (9.17) do wzoru (9.16), a następnie zmieniając kolejność całkowania, otrzymamy

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} du \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-u)} \right\} f(u) \quad (9.23)$$

Wyrażenie w nawiasie nazywa się **delta Diraca**

$$\delta(x-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-u)} \quad (9.24)$$

Ściśle rzecz biorąc zamiana kolejności całkowania prowadząca do wzoru (9.23) jest niedozwolona, jednak wyrażeniem (9.24) można posługiwać się w rachunkach

Zauważmy, że zmieniając zmienną $k \rightarrow -k$ we wzorze (9.24) otrzymujemy formalnie tą samą całkę ze zmienną $(u - x)$ w eksponencie. Stąd własność

$$\delta(x - u) = \delta(u - x). \quad (9.25)$$

Równanie (9.23) przyjmuje wtedy postać

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} du \delta(u - x) f(u) \quad (9.26)$$

Pozwala ono zinterpretować poprawnie matematycznie deltę Diraca. Nie jest ona zwykłą funkcją lecz *operacją liniową (dystrybucją)*, która funkcji f przyporządkowuje liczbę - jej wartość w punkcie x , $f(x)$. Operowanie deltą Diraca ma więc sens tylko w wyrażeniach całkowych.

Posługując się deltą Diraca, znajdziemy odpowiednik równości Parsevala dla transformaty Fouriera,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dk F^*(k) e^{-ikx} \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dk' F(k') e^{ik'x} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' F^*(k) F(k') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k'-k)x} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk F^*(k) \int_{-\infty}^{\infty} dk' F(k') \delta(k' - k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk F^*(k) F(k), \end{aligned} \quad (9.27)$$

gdzie w przedostatniej linijce wykorzystaliśmy inaczej zapisaną postać delty Diraca

$$\delta(k' - k) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k'-k)x} \right\}. \quad (9.28)$$

Ostatecznie otrzymujemy równości Parsevala

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |F(k)|^2 \quad (9.29)$$

Ćwiczenie - Udowodnić korzystając z własności (9.26) następujące własności delty Diraca

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1 \quad (9.30)$$

$$x \delta(x) = 0 \quad (9.31)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (9.32)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \{\delta(x - a) + \delta(x + a)\} \quad (9.33)$$

$$x \delta'(x) = -\delta(x) \quad (9.34)$$

gdzie $\delta'(x)$ oznacza pochodną delty Diraca. W ostatnim przypadku skorzystać z całkowania przez części.

9.5 Twierdzenie Shanona o próbkowaniu

Zapiszmy wzory dla transformaty Fouriera funkcji zależnej od czasu. Zamieniamy wtedy we wzorach (9.16) i (9.17)

$$x, u \rightarrow t, \quad k \rightarrow \omega \quad (9.35)$$

oraz w zgodzie z przyjętą powszechnie konwencją zmieniamy znaki w eksponentach na przeciwne

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{-i\omega t} \quad (9.36)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}. \quad (9.37)$$

Zauważmy, że częstotści ω mogą być zarówno dodatnie jak i ujemne.

Założmy że funkcja $f(t)$ ma transformatę Fouriera różną od zera dla częstotści $|\omega| < \omega_c$, tzn.

$$F(\omega) = 0 \quad \text{dla} \quad |\omega| > \omega_c. \quad (9.38)$$

Graniczną częstotć ω_c nazywa się częstotścią Nyquista. Tak więc

$$f(t) = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (9.39)$$

Skończony nośnik funkcji $F(\omega)$ o długości $L = 2\omega_c$ pozwala ją zapisać w formie szeregu Fouriera w zmiennej ω . W tym celu zamieńmy we wzorze (9.7)

$$x \rightarrow \omega, \quad k_n = \frac{2\pi}{L} n = \frac{n\pi}{\omega_c}, \quad (9.40)$$

otrzymując

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi\omega/\omega_c}. \quad (9.41)$$

Współczynniki rozwinięcia c_n znajdujemy mnożąc obie strony powyższego równania przez $\exp(-im\pi\omega/\omega_c)$ i całkując po przedziale $|\omega| < \omega_c$,

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega F(\omega) e^{-im\pi\omega/\omega_c} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega e^{i(n-m)\pi\omega/\omega_c}. \quad (9.42)$$

Dla $n \neq m$ całka po prawej stronie znika, gdyż zachodzi

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega e^{i(n-m)\pi\omega/\omega_c} = \frac{\omega_c}{i(n-m)\pi} \left\{ e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi} \right\} = (-1)^{n-m} - (-1)^{n-m} = 0, \quad (9.43)$$

natomiast dla $n = m$ całka wynosi $2\omega_c$.

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = 2\omega_c. \quad (9.44)$$

Stąd wzór

$$\int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega F(\omega) e^{-im\pi\omega/\omega_c} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2\omega_c \delta_{nm} = 2\omega_c c_m \quad (9.45)$$

i ostatecznie wzór na współczynniki rozwinięcia przyjmuje postać (zamieniając m na n)

$$c_n = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega F(\omega) e^{-in\pi\omega/\omega_c}. \quad (9.46)$$

Wprowadźmy okres T_c zgodnie ze wzorem

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}, \quad (9.47)$$

wtedy

$$c_n = \frac{T_c}{2} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{-in\omega T_c/2}. \quad (9.48)$$

Porównując to wyrażenie z (9.39) zauważamy, że

$$c_n = \frac{T_c}{2} f(nT_c/2). \quad (9.49)$$

Współczynniki szeregu Fouriera otrzymujemy próbując funkcję $f(t)$ w chwilach $t_n = nT_c/2$. Zwróćmy uwagę, że jest to częstość próbkowania **dwukrotnie większa** niż częstość związana z okresem T_c .

Podstawiając c_n do (9.41), otrzymujemy transformatę Fouriera

$$F(\omega) = \frac{T_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_c/2) e^{in\omega T_c/2} \quad (9.50)$$

Wzór odwrotny to

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) e^{-i\omega t} = \frac{T_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_c/2) \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(nT_c/2-t)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_c/2) \frac{\sin(\omega_c(t - nT_c/2))}{\omega_c(t - nT_c/2)}, \end{aligned} \quad (9.51)$$

lub wykorzystując relację $\omega_c T_c = 2\pi$,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_c/2) \frac{\sin(\omega_c t - n\pi)}{\omega_c t - n\pi} \quad (9.52)$$

Wzory (9.50) i (9.52) są treścią twierdzenia Shanona. Mówi ono, że funkcja której transformata Fouriera ma nośnik zwarty, $|\omega| < \omega_c$, jest określona dla dowolnego t poprzez nieskończoną, ale dyskretną, liczbę swoich wartości w równoodległych punktach czasowych t_n , będących całkowitą wielokrotnością połowy okresu, $t_n = nT_c/2$. Zapisując przy ich pomocy wzór (9.52), otrzymujemy

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \frac{\sin(\omega_c(t - t_n))}{\omega_c(t - t_n)}. \quad (9.53)$$