Metody matematyczne dla fizyków II
Równania różniczkowe

Krzysztof Golec–Biernat

Instytut Fizyki Jadrowej PAN w Krakowie
Instytut Fizyki Uniwerstytetu Rzeszowskiego

(19 lutego 2011)

Wersja robocza nie do dystrybucji

Kraków/Rzeszów
2006-07

Spis treści

Wykład 15

Równania różniczkowe zwyczajne

15.1 Równania zwyczajne drugiego rzędu

Wiele równań fizyki ma formę *liniowych* równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, postaci

$$\boxed{\alpha(z)\,w''(z) + \beta(z)\,w'(z) + \gamma(z)\,w(z) = 0} \tag{15.1}$$

gdzie $w(z)$ jest poszukiwaną funkcją zmiennej zespolonej z, natomiast funkcje $\alpha(z), \beta(z), \gamma(z)$ są znane. Primy oznaczają różniczkowanie po z. Dzieląc przez $\alpha(z)$ otrzymamy

$$w''(z) + p(z)\,w'(z) + q(z)\,w(z) = 0\,, \tag{15.2}$$

gdzie

$$p(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}\,, \qquad\qquad q(z) = \frac{\gamma(z)}{\alpha(z)}\,. \tag{15.3}$$

Ze względu na zero występujące po prawej stronie (15.1), rozważamy równania **jednorodne**.

Równania jednorodne mają zawsze dwa *liniowo niezależne* rozwiązania *szczególne* $w_1(z)$ i $w_2(z)$. *Rozwiązanie ogólne* $w(z)$ to ich kombinacja liniowa

$$\boxed{w(z) = c_1\,w_1(z) + c_2\,w_2(z)} \tag{15.4}$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi liczbami zespolonymi.

Definicja
Dwie funkcje $w_1(z)$ i $w_2(z)$ są **liniowo niezależne** jeżeli spełniony jest warunek

$$a_1\, w_1(z) + a_2\, w_2(z) = 0 \qquad <=> \qquad a_1 = a_2 = 0\,. \tag{15.5}$$

Jeśli warunek ten nie jest spełniony to wtedy jedna z funkcji wyraża się przez drugią, na przykład $w_1(z) = -a_2 w_2(z)/a_1$.

Twierdzenie
Warunkiem koniecznym i wystarczającym liniowej niezależności rozwiązań jest by istniał punkt z_0, w którym wyznacznik Wronskiego (wronskian) $\mathcal{W}$, zdefiniowany poniżej, jest różny od zera:

$$\mathcal{W}(z_0) = \begin{vmatrix} w_1(z_0) & w_2(z_0) \\ w_1'(z_0) & w_2'(z_0) \end{vmatrix} \neq 0\,. \tag{15.6}$$

Rozważmy bowiem kombinację liniową po lewej stronie relacji (15.5). Różniczkując po z dostaniemy układ równań na współczynniki a_1 i a_2

$$\begin{aligned} a_1\, w_1(z) + a_2\, w_2(z) &= 0 \\ a_1\, w_1'(z) + a_2\, w_2'(z) &= 0 \end{aligned} \tag{15.7}$$

Jeśli istnieje z_0 takie, że $\mathcal{W}(z_0) \neq 0$ to jedynym rozwiązaniem jest $a_1 = a_2 = 0$ i funkcje są liniowo niezależne. Natomiast warunek liniowej niezależności rozwiązań implikuje różny od zera wronskian w każdym punkcie.

Stałe c_1 i c_2 w rozwiązaniu ogólnym (15.4) można wyznaczyć znając wartości $w(z_0)$ i $w'(z_0)$ w dowolnym punkcie z_0, poprzez rozwiązanie układu równań

$$\begin{aligned} c_1\, w_1(z_0) + c_2\, w_2(z_0) &= w(z_0) \\ c_1\, w_1'(z_0) + c_2\, w_2'(z_0) &= w'(z_0)\,. \end{aligned} \tag{15.8}$$

Niezerowe rozwiązanie istnieje, gdyż $\mathcal{W}(z_0) \neq 0$.

15.2 Klasyfikacja punktów osobliwych

Będziemy poszukiwali rozwiązań równania jednorodnego poprzez rozwijanie funkcji $w(z)$ w szereg potęgowy wokół wybranego punktu z_0. W związku z tym wprowadźmy następujące definicje.

Punkt z_0 jest *punktem regularnym* równania (15.2) jeśli $p(z)$ i $q(z)$ są analityczne w tym punkcie. Można je wtedy rozwinąć w szereg Taylora w pewnym otoczeniu tego punktu

$$
\begin{aligned}
p(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} p_m (z - z_0)^m \\
q(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} q_m (z - z_0)^m . \qquad (15.9)
\end{aligned}
$$

Jeśli $p(z)$ lub $q(z)$ nie są analityczne w punkcie z_0 to jest on *punktem osobliwym* równania (15.2). Dla takich punktów istnieje bardziej szczegółowy podział.

Jeżeli w punkcie osobliwym z_0 funkcja $p(z)$ ma co najwyżej biegun 1. rzędu, natomiast $q(z)$ ma co najwyżej biegun 2 rzędu to jest on *regularnym punktem osobliwym.* Wtedy w pewnym otoczeniu pierścieniowym z_0

$$
\begin{aligned}
p(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} p_m (z - z_0)^{m-1} \\
q(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} q_m (z - z_0)^{m-2} . \qquad (15.10)
\end{aligned}
$$

Jeżeli powyższe warunki nie są spełnione to z_0 jest *nieregularnym punktem osobliwym.*

Twierdzenie Fuchsa
Dla punktu regularnego lub regularnie osobliwego można zawsze znaleźć przynajmniej jedno rozwiązanie szczególne równania (15.2) poprzez rozwinięcie wokół tego punktu w szereg postaci

$$
w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^{n+c} , \qquad (15.11)
$$

gdzie c jest liczbą zespoloną do wyznaczenia. Promień zbieżności tego szeregu jest określony przez odległości do najbliższego punktu osobliwego równania (15.2).

15.3 Punkt w nieskończoności

Punkt $z = \infty$ badamy wykonując transformację $t = 1/z$, przy pomocy której nieskończoność została odwzorowana w punkt $t = 0$. Zapiszmy równanie (15.2) przy pomocy zmiennej t. Różniczkując, znajdujemy

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt}\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{x^2}\frac{dw}{dt} = -t^2\frac{dw}{dt}$$

Dla drugiej pochodnej otrzymujemy

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dz}\right)\frac{dt}{dz} = -t^2\frac{d}{dt}\left(-t^2\frac{dw}{dt}\right) = t^4\,\frac{d^2w}{dt^2} + 2t^3\,\frac{dw}{dt}$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\,\frac{dw}{dz} + q(z)\,w = t^4\,\frac{d^2w}{dt^2} + \left\{2t^3 - p(t)\,t^2\right\}\frac{dw}{dt} + q(t)\,w$$

i ostateczne równanie w nowej zmiennej ma postać

$$\frac{d^2w}{dt^2} + P(t)\,\frac{dw}{dt} + Q(t)\,w = 0\,, \tag{15.12}$$

gdzie

$$P(t) = \frac{2\,t - p(t)}{t^2}\,, \qquad\qquad Q(t) = \frac{q(t)}{t^4} \tag{15.13}$$

Jeżeli dla $t \to 0$ $(z \to \infty)$ zachodzi

$$\begin{aligned} p(t) &= 2\,t + p_2\,t^2 + \ldots \qquad => \qquad p(z) = \frac{2}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \ldots \\ q(t) &= q_4\,t^4 + q_5\,t^5 + \ldots \qquad => \qquad q(z) = \frac{q_4}{z^4} + \frac{q_5}{z^5} + \ldots \end{aligned} \tag{15.14}$$

to $z = \infty$ jest *punktem regularnym.* Natomiast, gdy w tej samej granicy mamy

$$\begin{aligned} p(t) &= p_1\,t + p_2\,t^2 + \ldots \qquad => \qquad p(z) = \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \ldots \\ q(t) &= q_2\,t^2 + q_3\,t^3 + \ldots \qquad => \qquad q(z) = \frac{q_2}{z^2} + \frac{q_3}{z^3} + \ldots . \end{aligned} \tag{15.15}$$

to $z = \infty$ jest *regularnym punktem osobliwym.*

RÓWNANIE	RPO	NPO
Oscylatora harmonicznego $w'' + \omega^2 w = 0$	brak	∞
Hermite'a - kwantowy oscylator harmoniczny $w'' - 2z\,w' + 2\alpha\,w = 0$	brak	∞
Laguerre'a - atom wodoru $z\,w'' + (1-z)\,w' + a\,w = 0$	0	∞
Bessela $z^2\,w'' + z\,w' + (z^2-\nu^2)\,w = 0$	0	∞
Konfluentne $z\,w'' + (\gamma - z)\,w' - \alpha\,w = 0$	0	∞
Czebyszewa $(1-z^2)\,w'' - z\,w' + n^2\,w = 0$	$-1, 1, \infty$	brak
Legendre'a - kwantowy kręt orbitalny $(1-z^2)\,w'' - 2z\,w' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right] w = 0$	$-1, 1, \infty$	brak
Gaussa (hipergeometryczne) $z(z-1)\,w'' + [(1+\alpha+\beta)z - \gamma]\,w' + \alpha\beta\,w = 0$	$0, 1, \infty$	brak

W obu przypadkach możemy szukać rozwiązania w postaci szeregu Frobeniusa wokół nieskończoności

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+c} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^{n+c}. \tag{15.16}$$

W tabelce obok podajemy przykłady jednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu wraz z regularnymi (RPO) i nieregularnymi (NPO) punktami osobliwymi.

15.4 Równanie niejednorodne

Niejednorodne równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu ma postać

$$\boxed{w''(z) + p(z)\,w'(z) + q(z)\,w(z) = f(z),} \tag{15.17}$$

gdzie $f(z)$ jest znaną funkcją. Rozwiązanie ogólne to

$$w(z) = c_1\,w_1(z) + c_2\,w_2(z) + u(z), \tag{15.18}$$

gdzie w_1 i w_2 to liniowo niezależne rozwiązania równania jednorodnego, natomiast u to rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. Można je zbudować z rozwiązań w_1 i w_2 w następujący sposób.

Rozważmy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (15.4), w którym uzmienniliśmy stałe c_1 i c_2

$$u(z) = c_1(z)\, w_1(z) + c_2(z)\, w_2(z)\,. \tag{15.19}$$

Dobierzemy je tak by $u(z)$ było rozwiązaniem szczególnym równania niejednorodnego. Różniczkując po z dostaniemy

$$u' = \{c_1\, w_1' + c_2\, w_2'\} + \underbrace{\{c_1'\, w_1 + c_2'\, w_2\}}_{c_3} \tag{15.20}$$

Zażądajmy by $c_3 = 0$. Wtedy różniczkując raz jeszcze, znajdujemy

$$u'' = \{c_1\, w_1'' + c_2\, w_2''\} + \{c_1'\, w_1' + c_2'\, w_2'\}\,. \tag{15.21}$$

Po podstawieniu obu pochodnych do (15.17) i wykorzystaniu faktu, że w_1 i w_2 są rozwiązaniami równania jednorodnego, otrzymujemy

$$\{c_1'\, w_1' + c_2'\, w_2'\} = f\,. \tag{15.22}$$

Stąd następujący układ równań na pochodne c_1 i c_2

$$\begin{aligned} c_3 \equiv c_1'\, w_1 + c_2'\, w_2 &= 0 \\ c_1'\, w_1' + c_2'\, w_2' &= f\,. \end{aligned} \tag{15.23}$$

Dla rozwiązań liniowo niezależnych wronskian $\mathcal{W}$ jest różny od zera, wiec

$$c_1' = \frac{1}{\mathcal{W}} \begin{vmatrix} 0 & w_2 \\ f & w_2' \end{vmatrix} = -\frac{w_2 f}{\mathcal{W}}\,, \qquad c_2' = \frac{1}{\mathcal{W}} \begin{vmatrix} w_1 & 0 \\ w_2' & f \end{vmatrix} = \frac{w_1 f}{\mathcal{W}}\,.$$

Ostatecznie, rozwiązania

$$c_1(z) = -\int\limits_{z_0}^{z} \frac{w_2(\zeta)}{\mathcal{W}(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\zeta\,, \qquad c_2(z) = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{w_1(\zeta)}{\mathcal{W}(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\zeta\,. \tag{15.24}$$

Podstawiając do (15.19), otrzymujemy rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

$$\begin{aligned} u(z) &= \int\limits_{z_0}^{z} \left\{ \frac{w_1(\zeta)\, w_2(z) - w_2(\zeta)\, w_1(z)}{\mathcal{W}(\zeta)} \right\} f(\zeta)\, d\zeta \\ &\equiv \int\limits_{z_0}^{z} G(z,\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta\,, \end{aligned} \tag{15.25}$$

gdzie $G(z,\zeta)$ jest *funkcją Greena* zbudowaną z rozwiązań równania jednorodnego. Ostatecznie, rozwiazanie ogólne równania (15.17) to

$$\boxed{u(z) = c_1\, w_1(z) + c_2\, w_2(z) + \int\limits_{z_0}^{z} G(z,\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta} \tag{15.26}$$

Wykład 16

Rozwiązania równań różniczkowych

16.1 Rozwiązania wokół punktów regularnych

Niech z_0 będzie punktem regularnym równania

$$w''(z) + p(z)\, w'(z) + q(z)\, w(z) = 0\,, \tag{16.1}$$

co oznacza, że słuszne są wzory (10.9):

$$\begin{aligned} p(z) \ &= \ \sum_{m=0}^{\infty} p_m (z - z_0)^m \\ q(z) \ &= \ \sum_{m=0}^{\infty} q_m (z - z_0)^m\,. \end{aligned} \tag{16.2}$$

Poszukajmy rozwiązania w postaci

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{16.3}$$

w pewnym otoczeniu $|z - z_0| < R$. Promień zbieżności R jest określony przez odległość z_0 do najbliższego punktu osobliwego równania (16.1). Policzmy

$$w'(z) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n (z - z_0)^{n-1} \tag{16.4}$$

$$w''(z) \ = \ \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)(z - z_0)^{n-2}\,.$$

Wygodnie jest zmienić wskaźniki sumowania tak by zaczynały się od $n=0$

$$
\begin{aligned}
w'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\,(n+1)\,(z-z_0)^n \\
w''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)(n+1)\,(z-z_0)^n\,.
\end{aligned} \tag{16.5}
$$

Podstawiamy powyższe szeregi wraz z (16.2) do równania (16.1):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)(n+1)\,(z-z_0)^n \\
+&\left\{\sum_{m=0}^{\infty} p_m(z-z_0)^m\right\}\left\{\sum_{l=0}^{\infty} a_{l+1}\,(l+1)\,(z-z_0)^l\right\} \\
+&\left\{\sum_{m=0}^{\infty} q_m\,(z-z_0)^m\right\}\left\{\sum_{l=0}^{\infty} a_l\,(z-z_0)^l\right\} = 0\,.
\end{aligned} \tag{16.6}
$$

Skorzystamy następnie ze wzoru na mnożenie dwóch szeregów

$$
\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} B_l\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} A_{n-l}\,B_l\right). \tag{16.7}
$$

Oznaczając dla szeregów w drugiej linijce (16.6)

$$
A_m = p_m(z-z_0)^m\,, \qquad\qquad B_l = a_{l+1}\,(l+1)\,(z-z_0)^l
$$

oraz podobnie dla szeregów w trzeciej linijce, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)(n+1)\,(z-z_0)^n \\
+&\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{n} p_{n-l}\,a_{l+1}\,(l+1)\right\}(z-z_0)^n \\
+&\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{n} q_{n-l}\,a_l\right\}(z-z_0)^n = 0\,.
\end{aligned} \tag{16.8}
$$

Wyrazy przy każdej potędze $(z-z_0)^n$ muszą znikać, stąd warunek

$$
a_{n+2}\,(n+2)(n+1) + \sum_{l=0}^{n}\left[p_{n-l}\,a_{l+1}\,(l+1) + q_{n-l}\,a_l\right] = 0\,. \tag{16.9}
$$

Otrzymaliśmy zatem rekurencję wiążącą a_{n+2} z wyrazami a_l dla $l \leqslant (n+1)$. Przykładowo, dla $n=0,1$ otrzymamy

$$\begin{aligned} 2a_2 + p_0\,a_1 + q_0\,a_0 &= 0 \quad => \quad a_2 = a_2(a_0,a_1) \\ 6a_3 + (2p_0\,a_2 + p_1\,a_1) + (q_0\,a_1 + q_1\,a_0) &= 0 \quad => \quad a_3 = a_3(a_0,a_1)\,. \end{aligned}$$

W ten sposób znajdujemy współczynniki szeregu (16.3) jako funkcje dwóch pierwszych współczynników:

$$a_n = a_n(a_0,a_1)\,, \qquad n \geqslant 2 \tag{16.10}$$

i wtedy

$$w(z) = a_0 + a_1\,(z-z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n\,. \tag{16.11}$$

Postać (16.11) rozwiązania pozwala znaleźć dwa liniowo niezależne rozwiązania poprzez odpowiedni dobór współczynników a_0 i a_1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym liniowej niezależności rozwiązń jest istnienie punktu, w którym wronskian $\mathcal{W}$ był różny od zera. Dobierając zatem dwie pary współczynników (a_0,a_1) oraz (b_0,b_1) dla rozwiązań (16.11) tak by dla $z=z_0$ zachodziło

$$\mathcal{W}(z_0) = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_0\,b_1 - b_0\,a_1 \neq 0 \tag{16.12}$$

to otrzymamy dwa liniowo niezależne rozwiązania. Poniższy przykład ilustruje tę metodę.

16.1.1 Przykład

Poszukajmy rozwiązania równania

$$w''(z) + w(z) = 0\,. \tag{16.13}$$

Funkcje $p(z)=0$ i $q(z)=1$, stąd punkt $z=0$ jest punktem regularnym równania. Podstawiając rozwiązanie w postaci

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,z^n\,, \tag{16.14}$$

dla którego

$$w''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\,(n+2)(n+1)\,z^n\,, \tag{16.15}$$

dostajemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}\,(n+2)(n+1) + a_n\right] z^n = 0\,. \tag{16.16}$$

Stąd związek

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}\,. \tag{16.17}$$

Dla parzystych wskaźników znajdujemy

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{1\cdot 2} = (-1)^1\,\frac{a_0}{2!}\\
a_4 &= -\frac{a_2}{3\cdot 4} = (-1)^2\,\frac{a_0}{4!}\\
a_6 &= -\frac{a_4}{5\cdot 6} = (-1)^3\,\frac{a_0}{6!}\,.
\end{aligned}$$

Stąd ogólna postać współczynników dla $k \geqslant 1$:

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k-1)(2k)} = (-1)^k\,\frac{a_0}{(2k)!}\,. \tag{16.18}$$

W ten sposób otrzymaliśmy rozwiązanie

$$w_1(z) = a_0\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) = a_0 \cos z\,. \tag{16.19}$$

Podobnie, dla nieparzystych wskaźników znajdziemy

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{a_1}{2\cdot 3} = (-1)^1\,\frac{a_1}{3!}\\
a_5 &= -\frac{a_3}{4\cdot 5} = (-1)^2\,\frac{a_1}{5!}\\
a_7 &= -\frac{a_5}{6\cdot 7} = (-1)^3\,\frac{a_1}{7!}\,,
\end{aligned}$$

co prowadzi do drugiego, liniowo niezależnego rozwiązania

$$w_2(z) = a_1\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right) = a_1 \sin z\,. \tag{16.20}$$

Rozwiązanie ogólne to

$$w(z) = a_0 \cos z + a_1 \sin z\,. \tag{16.21}$$

16.2 Drugie rozwiązanie

Przedstawiona powyżej metoda znajdowania drugiego, liniowo niezależnego rozwiązania stosuje się tylko do rozwiązań wokół punktów regularnych. W ogólności, drugie rowiązanie można znaleźć przy pomocy pierwszego za pomocą wzoru, który wyprowadzimy.

Załóżmy, że w_1 i w_2 są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (10.1). Traktując wronskian $\mathcal{W}(z) \neq 0$ jako znaną funkcję podzielmy obie strony równania

$$w_1 w_2' - w_2 w_1' = \mathcal{W} \tag{16.22}$$

przez w_1^2, otrzymując

$$\frac{1}{w_1}\frac{dw_2}{dz} - \frac{w_2}{w_1^2}\frac{dw_1}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = \frac{\mathcal{W}}{w_1^2}\,. \tag{16.23}$$

Stąd rozwiązanie ostatniego równania

$$\boxed{w_2(z) = w_1(z)\exp\left\{\int^z \frac{\mathcal{W}(\xi)}{w_1^2(\xi)}\,d\xi\right\}} \tag{16.24}$$

Wzór ten może służyć do znalezienia drugiego rozwiązania pod warunkiem, że funkcja $\mathcal{W}$ jest znana. W tym celu policzmy pochodną wronskianu

$$\begin{aligned}\mathcal{W}' &= (w_1 w_2' - w_2 w_1')' = w_1 w_2'' - w_2 w_1'' \\ &= w_1(-pw_2' - qw_2) - w_2(-pw_1' - qw_1) \\ &= -p(w_1 w_2' - w_2 w_1')\,. \end{aligned} \tag{16.25}$$

Stąd równanie

$$\mathcal{W}' = -p\mathcal{W} \tag{16.26}$$

i jego rozwiązanie dane wzorem

$$\boxed{\mathcal{W}(\xi) = \exp\left\{-\int^{\xi} p(\zeta)\,d\zeta\right\}} \tag{16.27}$$

Dolne granice całkowania (stałe całkowania) należy wybrać tak by otrzymać najprostsze wzory.

Przykład

Jeżeli pierwsze rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego (16.13) to $w_1(z) = \cos z$ to drugie, liniowo niezależno ma postać

$$w_2(z) = \cos z \int^z \frac{d\zeta}{\cos^2\zeta} = -\cos z \,\mathrm{tg}\, z = -\sin z\,. \tag{16.28}$$

16.3 Rozwiązania wokół RPO

Niech z_0 będzie regularnym punktem osobliwym (RPO) równania

$$w''(z) + p(z)\,w'(z) + q(z)\,w(z) = 0\,, \tag{16.29}$$

co oznacza, że słuszne są wzory (10.10):

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} p_m (z-z_0)^{m-1} \\ q(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} q_m (z-z_0)^{m-2}\,. \end{aligned} \tag{16.30}$$

Poszukajmy rozwiązania równania (16.29) w postaci *szeregu Frobeniusa*

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+c}\,, \tag{16.31}$$

gdzie c jest liczbą do wyznaczenia. Różniczkując, otrzymamy

$$\begin{aligned} w'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(n+c)\,(z-z_0)^{n+c-1} \\ w''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(n+c)(n+c-1)\,(z-z_0)^{n+c-2}\,. \end{aligned} \tag{16.32}$$

Podstawiając do równania (16.29), znajdujemy

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(n+c)(n+c-1)\,(z-z_0)^{n+c-2} \\ &+ \left\{\sum_{m=0}^{\infty} p_m\,(z-z_0)^{m-1}\right\}\left\{\sum_{l=0}^{\infty} a_l\,(l+c)\,(z-z_0)^{l+c-1}\right\} \\ &+ \left\{\sum_{m=0}^{\infty} q_m\,(z-z_0)^{m-2}\right\}\left\{\sum_{l=0}^{\infty} a_l\,(z-z_0)^{l+c}\right\} = 0\,. \end{aligned} \tag{16.33}$$

Korzystając ze wzoru

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} A_m\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} B_l\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} A_{n-l}\, B_l\right).$$

przy mnożeniu dwóch szeregów, znajdujemy

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(n+c)(n+c-1)\,(z-z_0)^{n+c-2} \\ +\;& \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{n} p_{n-l}\, a_l\,(l+c)\right\}(z-z_0)^{n+c-2} \\ +\;& \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{n} q_{n-l}\, a_l\right\}(z-z_0)^{n+c-2} = 0\,. \end{aligned} \tag{16.34}$$

Stąd warunek znikania współczynników przy każdej potędze $(z-z_0)^{n+c-2}$:

$$a_n(n+c)(n+c-1) + \sum_{l=0}^{n}\left\{p_{n-l}\, a_l\,(l+c) + q_{n-l}\, a_l\right\} = 0\,.$$

Wyciagając wyrazy proporcjonalne do a_n z sumy dostajemy

$$a_n\left\{(n+c)(n+c-1) + (n+c)\,p_0 + q_0\right\} + \sum_{l=0}^{n-1}\{\ldots\} = 0\,. \tag{16.35}$$

Dla $n=0$ mamy tylko jeden wyraz

$$a_0\left\{c(c-1) + c\,p_0 + q_0\right\} = 0\,.$$

Zakładając, że $a_0 \neq 0$ otrzymujemy *równanie charakterystyczne*

$$\boxed{F(c) \equiv c^2 + (p_0-1)\,c + q_0 = 0} \tag{16.36}$$

Pozwala ono znaleźć wartość stałej c. Dla $n \geqslant 1$ znajdujemy rekurencję

$$a_n F(n+c) + \sum_{l=0}^{n-1}\left\{(l+c)\,p_{n-l}\, a_l + q_{n-l}\, a_l\right\} = 0\,. \tag{16.37}$$

Rekurencja ta jest użyteczna o ile $F(n+c) \neq 0$.

Niech c_1, c_2 będą pierwiastkami równania charakterystycznego (16.36). W zależności od relacji między tymi liczbami otrzymujemy nastepujące wyniki.

- Jeżeli $c_1 - c_2 \neq 0$ i nie jest liczbą całkowitą to istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania w postaci szeregów Frobeniusa.

- Jeżeli $c_1 - c_2 = m > 0$ jest liczba całkowitą to na ogól otrzymujemy tylko jedno rozwiązanie w postaci szeregu Frobeniusa z $c = c_1$. Dla $c = c_2$ natomiast zachodzi

  $$F(m + c_2) = F(c_1) = 0\,.$$

  Konstrukcja z szeregiem Forbeniusa prowadzi wtedy (chociaż nie zawsze) do rozwiązania liniowo zależnego od poprzedniego. Aby znaleźć drugie rozwiązanien należy wykorzystać wzór (11.21). W wyniku tego otrzymamy w obszarze $0 < |z - z_0| < R$ drugie rozwiązanie postaci

  $$w_2(z) = w_1(z)\ln(z - z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(z - z_0)^{k+c_2}\,. \tag{16.38}$$

  Jest ono osobliwe dla $z = z_0$ ze względu na występujący logarytm, a także ze względu na drugi szereg jeśli c_2 jest liczbą zespoloną lub liczbą całkowitą mniejszą od zera..

- Dla $c_1 = c_2$ drugie rozwiązanie ma postać (16.38) z $c_2 \to c_1 + 1$.

Wykład 17

Równanie Bessela

Rozwiążmy równanie Bessela z parametrem $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\boxed{z^2\, w''(z) + z\, w'(z) + (z^2 - m^2)\, w(z) = 0} \tag{17.1}$$

Wtedy

$$p(z) = \frac{1}{z}\,, \qquad\qquad q(z) = -\frac{m^2}{z^2} + 1\,. \tag{17.2}$$

Punkt $z = 0$ jest regularnym punktem osobliwym, natomiast $z = \infty$ jest NPO. Stąd poszukiwana forma rozwiązania w postaci szeregu potęgowego Frobeniusa wokół $z = 0$:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^{n+c}\,. \tag{17.3}$$

Jedynie niezerowe współczynniki rozwinięcia $p(z)$ i $q(z)$ wokół zera to

$$p_0 = 1\,, \qquad\qquad q_0 = -m^2\,, \qquad\qquad q_2 = 1\,. \tag{17.4}$$

Stąd równanie charakterystyczne

$$F(c) = c^2 - m^2 = 0 \tag{17.5}$$

z pierwiastkami $c_1 = m \geqslant 0$ i $c_2 = -m$.

Poszukamy rozwiąznia dla większego pierwiastka $c_1 = m$. Wtedy

$$F(n+m) = (n+m)^2 - m^2 = n\,(n+2m) \neq 0 \tag{17.6}$$

dla każdego $n>0$ i relacja (16.37) przyjmuje następującą postać dla $n\geqslant 2$

$$n(n+2m)\,a_n + a_{n-2} = 0\,. \tag{17.7}$$

Dla $n=1$ mamy $a_1=0$, stąd wszystkie współczynniki z nieparzystymi wskaźnikami znikają. Natomiast dla parzystych $n=2k$, gdzie $k=1,2,\ldots$, otrzymujemy

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)(2k+2m)} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2\,k\,(k+m)}\,. \tag{17.8}$$

Kolejne współczynniki to

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2^2\cdot 1\cdot(1+m)}\\
a_4 &= -\frac{a_2}{2^2\cdot 2\cdot(2+m)} = (-1)^2\,\frac{a_0}{2^4\,(1\cdot 2)(1+m)(2+m)}\\
a_{2k} &= (-1)^k\,\frac{a_0}{2^{2k}\,k!\,(1+m)\ldots(k+m)} = (-1)^k\,m!\,\frac{a_0}{2^{2k}\,k!\,(k+m)!}
\end{aligned}$$

i stąd rozwiązanie

$$w(z) = a_0\,2^m\,m!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}. \tag{17.9}$$

Pomijając nieistotne stałe czynniki przed sumą, otrzymujemy **funkcję Bessela** m-tego rzędu

$$\boxed{J_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}} \tag{17.10}$$

Szereg jest bezwzględnie zbieżny w całej płaszczyźnie zespolonej.

Wzór (17.10) można rozszerzyć na zespolone wartości parametru $m\to\nu\in\mathbb{C}$, zastępując w mianowniku

$$(k+m)! = \Gamma(k+m+1) \quad\to\quad \Gamma(k+\nu+1)\,.$$

Wtedy funkcja Bessela

$$\boxed{J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}} \tag{17.11}$$

jest rozwiązaniem równaniem Bessela z parametrem $m=\mu\in\mathbb{C}$. Jeżeli tylko pierwistki równania charakterystycznego spełniają warunek, że $c_1-c_2=2\nu$ nie jest liczbą całkowitą to $J_\nu(z)$ i $J_{-\nu}(z)$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami, a rozwiązanie ogólne to ich kombinacja liniowa.

Dla $m\in\mathbb{Z}$, drugie rozwiązanie jest liniowo zależne od pierwszego. Kładąc bowiem $\nu=-m$ we wzorze (17.11), otrzymamy

$$J_{-m}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-m}. \tag{17.12}$$

Zauważmy, że

$$\frac{1}{\Gamma(k-m+1)} = 0 \qquad \text{dla} \qquad k=0,1\ldots(m-1),$$

stąd sumowanie w powyższym wzorze rozpoczyna się od $k=m$. Zmieniając następnie wskaźnik sumowania na $k'=k-m$, znajdujemy wzór dla dodatnich całkowitych m

$$\begin{aligned} J_{-m}(z) &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-m} \\ &= \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'+m}}{(k'+m)!\,\Gamma(k'+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k'+m} \\ &= (-1)^m J_m(z). \end{aligned} \tag{17.13}$$

Aby znaleźć drugie rozwiązanie liniowo niezależne od J_m zauważmy, że dla niecałkowitego ν kombinacja liniowa

$$\boxed{Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}} \tag{17.14}$$

jest rozwiązaniem równania Bessela liniowo niezależnym od J_ν. Przechodząc następnie do granicy

$$Y_m(z) = \lim_{\nu\to m} \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}, \tag{17.15}$$

otrzymujemy poszukiwane drugie rozwiązanie dla całkowitych m.

Podsumowując, dla dowolnych wartości parametru $m=\nu\in\mathbb{C}$ w równaniu Bessela rozwiązaniem ogólnym jest kombinacja liniowa

$$w(z) = c_1\,J_\nu(z) + c_2\,Y_\nu(z). \tag{17.16}$$

Asymptotyka obu rozwiązań dla $z \to 0$ to

$$J_\nu(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \tag{17.17}$$

$$Y_\nu(z) \approx \begin{cases} \frac{2}{\pi}\ln z & \text{dla } \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^\nu & \text{dla } \nu \neq 0\,. \end{cases} \tag{17.18}$$

Tak więc dla całkowitego dotatniego m, $J_m(z)$ jest nieosobliwe w zerze w przeciwieństwie do $Y_m(z)$.

Dla rzeczywistych $x \to \infty$ mamy

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) \tag{17.19}$$

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right). \tag{17.20}$$

Obie funkcje zachowują się jak funkcje trygonometryczne z zanikającą amplitudą proporcjonalną do $1/\sqrt{x}$.

17.1 Przykład dla $\nu^2 = 1/4$

Rozwiązać równanie Bessela dla $\nu^2 = 1/4$

$$z^2\,w''(z) + z\,w'(z) + \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)w(z) = 0 \tag{17.21}$$

Korzystając ze wzorów (9.14) i (9.15), otrzymamy

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}\,k!}\sqrt{\pi}\right)^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}\left(\frac{z}{2}\right)^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\,. \end{aligned} \tag{17.22}$$

Podobnie, dla $\nu = -\frac{1}{2}$, znajdujemy

$$
\begin{aligned}
J_{-\frac{1}{2}}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-\frac{1}{2}+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{k+\frac{1}{2}}{\Gamma(k+\frac{1}{2}+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2k+1}{2} \left(\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}\,k!}\sqrt{\pi}\right)^{-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z\,. \qquad (17.23)
\end{aligned}
$$

Stąd ogólne rozwiązanie równania Bessela z $\nu^2 = 1/4$ wyraża się poprzez funkcje elementarne

$$
w(z) = c_1 \frac{\sin z}{\sqrt{z}} + c_2 \frac{\cos z}{\sqrt{z}}\,. \qquad (17.24)
$$

17.2 Inne funkcje Bessela

Często użyteczne są funkcje skonstruowane z funkcji Bessela J_ν i Y_ν. Tak zwane *funkcje Hankela* pierwszego i drugiego rodzaju to

$$
H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) \qquad (17.25)
$$

$$
H^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z)\,. \qquad (17.26)
$$

Ich postać asymptotyczna dla rzeczywistych $x \to \infty$ to

$$
H_\nu^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[\pm i\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right]\,. \qquad (17.27)
$$

Natomiast dla $z \to 0$ mamy zachowanie osobliwe takie jak Y_ν.

Zmodyfikowane lub hiperboliczne funkcje Bessela są zdefiniowane jako

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) \tag{17.28}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz)\,. \tag{17.29}$$

Są one dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania

$$z^2 w'' + z w' - (z^2 + \nu^2) w = 0\,. \tag{17.30}$$

Ich zachowanie asymptotyczne dla rzeczywistych $x \to \infty$ to

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \mathrm{e}^x \tag{17.31}$$

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \mathrm{e}^{-x}\,. \tag{17.32}$$

Dla zespolonego $z \to 0$ funkcja I_ν jest regularna tak jak J_ν, natomiast K_ν jest osobliwa tak jak Y_ν.

Wykład 18

Równanie hipergeometryczne Gaussa

Równanie hipergeometryczne Gaussa

$$\boxed{z(z-1)\,\frac{d^2w}{dz^2}+[(1+\alpha+\beta)z-\gamma]\,\frac{dw}{dz}+\alpha\beta\, w=0} \tag{18.1}$$

ma trzy regularne punkty osobliwe w $z=0,1,\infty$.

Łatwo pokazać bezpośrednim rachunkiem, że równanie Gaussa można zapisać w równoważnej postaci

$$\boxed{\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}+\gamma-1\right)w=\left(z\frac{d}{dz}+\alpha\right)\left(z\frac{d}{dz}+\beta\right)w} \tag{18.2}$$

Udowodnimy, że w obszarze $|z|<1$ rozwiązanie wokół $z=0$ ma postać szeregu *hipergeometrycznego*:

$$\boxed{w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\,\frac{z^n}{n!}} \tag{18.3}$$

gdzie symbol Pochhammera to

$$(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\,. \tag{18.4}$$

Działając poniższymi operatorami różniczkowymi, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\left(z\frac{d}{dz}+\beta\right)w &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}(n+\beta)\frac{z^n}{n!}\\
\left(z\frac{d}{dz}+\alpha\right)\left(z\frac{d}{dz}+\beta\right)w &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}(n+\alpha)(n+\beta)\frac{z^n}{n!}\,, \qquad (18.5)
\end{aligned}
$$

a także

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}+\gamma-1\right)w &= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}(n+\gamma-1)\frac{z^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}n(n+\gamma-1)\frac{z^{n-1}}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}}(n+\gamma)\frac{z^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)}(n+\gamma)\frac{z^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}(n+\alpha)(n+\beta)\frac{z^n}{n!}\,, \qquad (18.6)
\end{aligned}
$$

Porównując prawe strony równości (18.5) i (18.6) otrzymujemy równanie Gaussa w formie (18.2). W ogólności, jednym z rozwiązań szczególnych równania (18.1) jest **funkcja hipergeometryczna**

$$
w(z) = {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)\,, \qquad (18.7)
$$

reprezentowana w obszarze $|z|<1$ przez szereg hipergeometryczny (18.3). Wiele funkcji specjalnych można zapisać przy pomocy funkcji hipergeometrycznej z odpowiednimi wartościami parametrów α,β,γ.

18.1 Równanie konfluentne Gaussa

Zamieńmy zmienną $z=x/\beta$ w równaniu hipergeometrycznym Gaussa. Wtedy

$$
\frac{d}{dz}=\frac{dx}{dz}\frac{d}{dx}=\beta\frac{d}{dx}\,, \qquad \frac{d^2}{dz^2}=\beta^2\frac{d^2}{dx^2}
$$

i stąd równanie Gaussa przyjmuje postać

$$\beta^2 \frac{x}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}-1\right)\frac{d^2w}{dx^2}+\beta\left[(1+\alpha+\beta)\frac{x}{\beta}-\gamma\right]\frac{dw}{dx}+\alpha\beta\, w=0\,. \tag{18.8}$$

Dzieląc obie strony przez β, a następnie przechodząc do granicy $\beta\to\infty$, dostajemy

$$-x\,\frac{d^2w}{dx^2}+(x-\gamma)\,\frac{dw}{dx}+\alpha\, w=0\,. \tag{18.9}$$

Kładąc na powrót $x=z$ otrzymujemy konfluentne równanie Gaussa

$$\boxed{z\,\frac{d^2w}{dz^2}+(\gamma-z)\,\frac{dw}{dz}-\alpha\, w=0} \tag{18.10}$$

W rezultacie tej procedury dwa regularne punkty osobliwe (RPO) równania Gaussa zlewaja się w jeden, $1\to\infty$, tworząc nieregularny punkt osobliwy (NPO) równania konfluentnego w $z=\infty$. Punkt $z=0$ pozostaje RPO tego równania. Równanie konfluentne można zapisać w równoważnej postaci

$$\boxed{\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}+\gamma-1\right)w=\left(z\frac{d}{dz}+\alpha\right)w} \tag{18.11}$$

Podstawiając w równaniu (18.3) wyrażenie $z=x/\beta$, dostajemy

$$w(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n\,\beta^n}\,\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\ldots\left(1+\frac{n-1}{\beta}\right)\frac{x^n}{n!}\,.$$

Przechodząc do granicy $\beta\to\infty$ oraz kładąc $x=z$, otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie równania (18.10)

$$\boxed{w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}\,\frac{z^n}{n!}} \tag{18.12}$$

Reprezentuje on w obszarze $|z|<1$ **konfluentną funkcję hipergeometryczną**

$$w(x)={}_1F_1(\alpha,\gamma;x)\,. \tag{18.13}$$

Wiele funkcji specjalnych można wyrazić przy pomocy funkcji konfluentnej.

Wykład 19

Równanie Legendre'a

Rozważmy równanie Legendre'a dla dowolnej wartości parametru $\mu \in \mathbb{C}$

$$\boxed{(1-z^2)\,\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\,\frac{dw}{dz} + \mu(\mu+1)\,w = 0} \tag{19.1}$$

Ma ono trzy regularne punkty osobliwe w $z = \pm 1, \infty$. Można je zatem sprowadzić do równania hipergeometrycznego Gaussa

$$y(y-1)\,\frac{d^2w}{dy^2} + [(1+\alpha+\beta)y-\gamma]\,\frac{dw}{dy} + \alpha\beta\,w = 0\,, \tag{19.2}$$

wykonując transformację

$$y = \tfrac{1}{2}(1-z)\,, \tag{19.3}$$

przeprowadzającą punkty $z = \pm 1$ w punkty osobliwe $y = 0, 1$ równania hipergeometrycznego. Otrzymujemy wtedy

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{dy}\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\,, \qquad\qquad \frac{d^2}{dz^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dy^2}$$

oraz

$$(1-z^2) = 4y(1-y)\,, \qquad\qquad z = 1-2y\,.$$

Po podstawieniu do (19.1) otrzymujemy równanie hipergeometryczne

$$y(y-1)\,\frac{d^2w}{dy^2} + (2y-1)\,\frac{dw}{dy} - \mu(\mu+1)\,w = 0 \tag{19.4}$$

z parametrami spełniającymi związki

$$\gamma = 1\,, \qquad \alpha + \beta = \mu\,, \qquad \alpha\beta = -\mu(\mu+1)\,. \tag{19.5}$$

Dwa ostatnie równania prowadzą do $\alpha = -\mu$ oraz $\beta = \mu + 1$.

Jedno z rozwiązań równania hipergeometrycznego (19.2) jest funkcją hipergeometryczną ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; y)$, która w przypadku równania (19.4) przyjmuje postać

$$w(y) = {}_2F_1(-\mu, \mu+1, 1; y)\,. \tag{19.6}$$

Dla $|y| < 1$ jest ona reprezentowana przez szereg hipergeometryczny

$${}_2F_1(-\mu, \mu+1, 1; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)_n\,(\mu+1)_n}{(1)_n}\,\frac{y^n}{n!}\,, \tag{19.7}$$

gdzie symbol Pochhammera

$$(-\mu)_n = (-\mu)(-\mu+1)\ldots(-\mu+n-1) \tag{19.8}$$

i podobnie dla pozostałych wielkości. Zauważmy przy tym, że

$$(1)_n = n!\,. \tag{19.9}$$

Podstawiając relację (19.3) do (19.7), otrzymamy w obszarze $|z-1| < 2$ rozwiązanie rówanie Legendre'a w postaci

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu)_n\,(\mu+1)_n}{(n!)^2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n. \tag{19.10}$$

19.1 Wielomiany Legendre'a

Równanie Legendre'a pojawia się w fizyce w problemach o symetrii sferycznej, opisywanych równaniami różniczkowymi z operatorem Laplace'a, gdy zmienna $z = \cos\theta$. Wtedy szereg (19.10) powinien być zbieżny na granicy obszaru zbieżności dla $z = -1$ ($\theta = \pi$). Tak nie jest i jedynym rozwiązaniem problemu jest założenie, że dopuszczalne są tylko całkowite wartości μ:

$$\boxed{\mu = l = 0, 1, 2, \ldots} \tag{19.11}$$

Wtedy dla wszystkich $n \geqslant (l+1)$ zachodzi dla $(-\mu)_n$ we wzorze (19.10)

$$(-l)_n = (-l)(-l+1)\ldots\underline{(-l+l)}\ldots(-l+n-1) = 0 \tag{19.12}$$

i nieskończony szereg (19.10) staje się *wielomianem Legendre'a* stopnia l:

$$\boxed{P_l(z) = \sum_{n=0}^{l} \frac{(-l)_n\,(l+1)_n}{(n!)^2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n} \tag{19.13}$$

Kilka pierwszych wielomianów to

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 \\ P_1(z) &= z \\ P_2(z) &= \tfrac{1}{2}(3z^2-1) \\ P_3(z) &= \tfrac{1}{2}(5z^3-3z)\,. \end{aligned} \tag{19.14}$$

W ogólności słuszna jest własność

$$P_l(-z) = (-1)^l\,P_l(z)\,. \tag{19.15}$$

Parzystość wielomianów jest więc określona przez parzystość l.

Ograniczając argument do liczb rzeczywistych z przedziału $-1 \leqslant x \leqslant 1$, otrzymujemy warunek ortogonalności dla wielomianów Legendre'a

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\,P_{l'}(x)\,dx = 0 \qquad \text{dla} \qquad l \neq l'\,. \tag{19.16}$$

Ponadto są one unormowane tak, że

$$\int_{-1}^{1} P_l^2(x)\,dx = \frac{2}{2l+1}\,. \tag{19.17}$$

19.2 Stowarzyszone wielomiany Legendre'a

Zdefiniujmy na koniec stowarzyszone wielomiany Legendre'a

$$\boxed{P_l^{(m)}(z) = (1-z^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dz^m}P_l(z)} \tag{19.18}$$

gdzie $l = 0,1,\ldots$ oraz $m = 0,1,\ldots l$.

Są one rozwiązaniem stowarzyszonego równania Legendre'a

$$(1-z^2)\,w'' - 2z\,w' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right] w = 0\,. \tag{19.19}$$

Pojawia się ono w opisie kwantowego krętu orbitalnego dla orbitalnej liczby kwantowej l oraz magnetycznej liczby kwantowej m.

Wykład 20

Teoria Sturma–Liouville'a

Rozważmy równanie Legendre'a (19.1) dla rzeczywistych $z = x \in [-1, 1]$ oraz całkowitych dodatnich wartości $\mu = l$. Można je wtedy zapisać w postaci równania własnego

$$\left\{ (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} \right\} P_l(x) = -l(l+1) P_l(x) . \tag{20.1}$$

Liczba $\lambda_l = -l(l+1)$ jest wartością własną operatora różniczkowego w równaniu Legendre'a, natomiast $P_l(x)$ jest funkcją własną odwpwiadającą wartości własnej λ_l.

20.1 Problem własny

W ogólności równanie własne ma postać

$$\hat{L} f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x) , \tag{20.2}$$

gdzie

$$\hat{L} = \alpha(x) \frac{d^2}{dx^2} + \beta(x) \frac{d}{dx} + \gamma(x) , \qquad \alpha(x) \geqslant 0 \tag{20.3}$$

jest operatorem różniczkowym działająceym na *funkcje zespolone* $f(x)$ o argumencie *rzeczywistym* $x \in [a, b]$. Funkcja $\alpha(x)$ może być równa zeru tylko na końcach tego przedziału. $\hat{L}$ jest operatorem liniowym, tzn. dla dowolnych funkcji f, g oraz liczb $a, b \in \mathbb{C}$ zachodzi

$$\hat{L}\{a f(x) + b g(x)\} = a \hat{L} f(x) + b \hat{L} g(x) . \tag{20.4}$$

Zagadnienie Sturma–Liouville'a polega na rozwiązaniu równania własnego (20.2) dla operatora $\hat{L}$ spełniającego warunek *samosprzężoności* (dyskutowany w następnym rozdziale). Liczba λ nazywa się *wartością własną*, natomiast f_λ to *funkcja własna* do wartości własnej λ. Zbiór wszystkich wartości własnych nazywa się *widmem* operatora $\hat{L}$.

Operator (20.3) można zapisać w innej postaci mnożac go przez funkcję $w(x)$ spełniającą równanie

$$[w(x)\alpha(x)]' = w(x)\beta(x)\,. \tag{20.5}$$

Wtedy zachodzi

$$w\alpha\frac{d^2}{dx^2} + [w\alpha]'\frac{d}{dx} + w\gamma = \frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{dg}{dx}\right) + q(x)\,, \tag{20.6}$$

gdzie funkcje

$$p(x) = w(x)\alpha(x)\,, \qquad\qquad q(x) = w(x)\gamma(x)\,. \tag{20.7}$$

Równanie własne (20.2) przyjjmuje wiec równoważną postać

$$\boxed{\left\{\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right\} f(x) = \lambda w(x) f(x)} \tag{20.8}$$

Funkcję $w(x)$ można znaleźć dzieląc obie strony równania (20.5) przez $w(x)\alpha(x)$. W wyniku otrzymujemy rówanie

$$\frac{d}{dx}\ln(w(x)\alpha(x)) = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\,. \tag{20.9}$$

Stąd zawsze nieujemne rozwiązanie

$$w(x) = \frac{1}{\alpha(x)}\exp\left\{\int^x \frac{\beta(y)}{\alpha(y)}dy\right\} \geqslant 0\,. \tag{20.10}$$

Przykład

Dla operatora w równaniu Legendre'a (20.1) funkcja $w(x)=1$, gdyż

$$\alpha'(x) = (1-x^2)' = -2x = \beta(x)\,.$$

Nie ma więc konieczności szukania w i operator $\hat{L}$ w tym przypadku to

$$\hat{L} = \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d}{dx}\right). \tag{20.11}$$

20.2 Iloczyn skalarny

Funkcja $w(x)$, nazywana *wagą*, służy do określenia *iloczynu skalarnego* w przestrzeni funkcji, na które działa operator $\hat{L}$

$$\boxed{\langle f|g\rangle = \int_a^b f^*(x)\, g(x)\, w(x)\, dx} \tag{20.12}$$

Iloczyn skalarny ma następujące własności

$$\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle^* \tag{20.13}$$
$$\langle f|\lambda g\rangle = \lambda\, \langle f|g\rangle, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \tag{20.14}$$
$$\langle f|g_1+g_2\rangle = \langle f|g_1\rangle + \langle f|g_2\rangle \tag{20.15}$$
$$\langle f|f\rangle \geqslant 0, \tag{20.16}$$

przy czym

$$\langle f|f\rangle = 0 \qquad <=> \qquad f \equiv 0. \tag{20.17}$$

Drugi i trzeci warunek wyraża własność liniowości iloczynu skalarnego względem drugiego argumentu. Z własności (20.13) wynika warunek antyliniowości dla pierwszego argumentu.

$$\begin{aligned} \langle \lambda f|g\rangle &= \lambda^*\, \langle f|g\rangle \\ \langle f_1+f_2|g\rangle &= \langle f_1|g\rangle + \langle f_2|g\rangle \end{aligned} \tag{20.18}$$

Z własności (20.13) wynika także to, że $\langle f|f\rangle$ jest liczbą rzeczywistą, co umożliwia nałożenie warunku (20.16).

Wprowadźmy na koniec następującą definicję. Dwie niezerowe funkcje są *ortogonalne* jeśli

$$\langle f_1|f_2\rangle = 0. \tag{20.19}$$

20.3 Operatory samosprzężone

Warunek *samosprzężoności* lub *hermitowskości* operator liniowego jest określony względem iloczynu skalarnego w przestrzeni, w której on działa.

Definicja
Operator liniowy $\hat{L}$ jest samosprzężony jeżeli dla dowolnych funkcji f i g z przestrzeni, w której działa L, zachodzi

$$\boxed{\left\langle f|\hat{L}g\right\rangle = \left\langle \hat{L}f|g\right\rangle} \tag{20.20}$$

Znajdziemy warunek jaki musi spełniać operator różniczkowy (20.3) by był on samosprzężony. Rozważmy

$$\begin{aligned}\left\langle f|\hat{L}g\right\rangle &= \int_a^b f^*(x)\,w(x)\left\{\alpha(x)\frac{d^2}{dx^2}+\beta(x)\frac{d}{dx}+\gamma(x)\right\}g(x)\,dx \\ &= \int_a^b f^*(x)\left\{\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{dg}{dx}\right)+q(x)g(x)\right\}dx\,.\end{aligned}$$

W ostatniej linijce wykorzystaliśmy wzór (20.6). Całkując dwukrotnie przez części, dostajemy

$$\begin{aligned}\left\langle f|\hat{L}g\right\rangle &= p(x)\left[f^*(x)\frac{dg}{dx}-\frac{df^*}{dx}g(x)\right]\Bigg|_a^b \\ &+ \int_a^b\left\{\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{df}{dx}\right)+q(x)f(x)\right\}^*g(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Wyrażenie w drugiej linijce to $\left\langle \hat{L}f|g\right\rangle$. Tak więc $\hat{L}$ jest samosprzężony, gdy słuszny jest następujący warunek

$$\boxed{p(x)\left[f^*(x)\frac{dg}{dx}-\frac{df^*}{dx}g(x)\right]\Bigg|_a^b = 0} \tag{20.21}$$

Zauważmy, że warunek ten nakłada ograniczenie zarówno na operator $\hat{L}$ (poprzez funkcję p) jaki i na przestrzeń funkcji, w której on działa.

Przykład
Operator (20.11) jest samosprzężony względem iloczynu skalarnego

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^1 f^*(x)\,g(x)\,dx\,, \tag{20.22}$$

określonego dla funkcji posiadających *skończoną wartość* w $x=\pm1$. Funkcja $p(x)=1-x^2$ znika w $x=\pm1$ i warunek (20.21) jest spełniony.

20.4 Własności operatorów samosprzężonych

Operatory samosprzężone pełnią bardzo ważną rolę w mechanice kwantowej, gdyż słuszne są następujące twierdzenia.

Twierdzenie
Wartości własne operatorów samosprzężonych są **rzeczywiste***.*

Udowodnimy to korzystając z równania własnego:

$$\hat{L} f_\lambda = \lambda f_\lambda \, .$$

Wtedy

$$\left\langle f_\lambda | \hat{L} f_\lambda \right\rangle = \lambda \left\langle f_\lambda | f_\lambda \right\rangle = \left\langle \hat{L} f_\lambda | f_\lambda \right\rangle = \lambda^* \left\langle f_\lambda | f_\lambda \right\rangle ,$$

gdzie skorzystaliśmy z samosprzężoności oraz własności iloczynu skalarnego. Ponieważ $\langle f_\lambda | f_\lambda \rangle > 0$, stąd $\lambda = \lambda^*$ jest liczbą rzeczywistą.

Twierdzenie
Funkcje własne operatorów samosprzężonych do różnych wartości własnych są **ortogonalne***.*

Aby udowodnić to twierdzenie, rozważmy dwie funkcje własne $f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}$ odpowiadające różnym wartościom własnym:

$$\left\langle f_{\lambda_1} | \hat{L} f_{\lambda_2} \right\rangle = \lambda_2 \left\langle f_{\lambda_1} | f_{\lambda_2} \right\rangle = \left\langle \hat{L} f_{\lambda_1} | f_{\lambda_2} \right\rangle = \lambda_1 \left\langle f_{\lambda_1} | f_{\lambda_2} \right\rangle .$$

Ponieważ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ to $\langle f_{\lambda_1} | f_{\lambda_2} \rangle = 0$ i funkcje własne są ortogonalne.

Twierdzenia to wyjaśnia dlaczego wartości własne operatora w równaniu Legendre'a są rzeczywiste, a wielomiany Legendre'a, są ortogonalne.

20.5 Zupełność funkcji własnych

Zbiór funkcji własnych operatorów samosprzężonych tworzy *układ zupełny*. Oznacza to, że dowolną funkcję zespoloną $f(x)$, całkowalną z kwadratem

$$\langle f | f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 \, w(x) \, dx < \infty \, , \tag{20.23}$$

regularne	$p(x) > 0$	$w(x) > 0$
osobliwe	$p(x) \geqslant 0$	$w(x) \geqslant 0$
okresowe	$p(a) = p(b)$	$w(x) > 0$

Tablica 20.1: Rodzaje zagadnień Sturma-Liouville'a. Liczby a i b to granice całkowania w iloczynie skalarnym (20.12).

można zapisać przy pomocy funkcji własnych. W przypadku, gdy istnieją tylko dyskretne wartości własne $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)\,, \tag{20.24}$$

gdzie $a_n \in \mathbb{C}$ to współczynniki rozwinięcia. Szereg po prawej stronie jest zbieżny do $f(x)$ w całym przedziale $[a, b]$ w sensie wartości średniej

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x) \right|^2 w(x)\, dx = 0\,. \tag{20.25}$$

Pozostaje odpowiedzieć na pytanie kiedy spektrum wartości własnych w zagadnieniu Sturma-Liouville'a jest tylko dyskretne. Jest to związane z podziałem zagadnień Sturma-Liouville'a określonym w powyższej tabelce.

Dla *regularnych* zagadnień Sturma–Liouville'a istnieją tylko *dyskretne* wartości własnych. Są one niezdegenerowane co oznacza, że każdej wartości własnej odpowiada tylko jedna funkcja własna (z dokładknokścią do przemnożenia przez stałą). Szereg (20.24) jest wtedy zbieżny punktowo do $f(x)$ w każdym punkcie ciągłości funkcji lub do średniej

$$\tfrac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right] \tag{20.26}$$

w każdym punkcie nieciągłości.

Zagadnienia *osobliwe* nie muszą mieć tylko dyskretnych wartości własnych. W ogólności ich zbiór ich wartości własnych, nazywany *widmem*, może być dyskretny, ciągły lub mieszany. Funkcje własne do dyskretnych wartości własnych mogą, *ale nie muszą* tworzyć układu zupełnego. Podobnie dla zadania *okresowego*.

Wykład 21

Wielomiany ortogonalne

21.1 Konstrukcja wielomianów ortogonalnych

Naszym celem jest rozwiązanie równania własnego dla samosprzężonych operatorów (20.3),

$$\left\{\alpha(x)\frac{d^2}{dx^2} + \beta(x)\frac{d}{dx} + \gamma(x)\right\}W_n(x) = -\lambda_n W_n(x)\,, \tag{21.1}$$

w klasie funkcji będących wielomianami rzeczywistymi stopnia n

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} w_k\, x^k\,. \tag{21.2}$$

W wyniku otrzymamy zbiór wielomianów ortogonalnych, numerowanych stopniem wielomianu $n = 0, 1, 2, \ldots$ i tworzących w większości przypadków układ zupełny, przy pomocy którego można rozwijać funkcje w szereg.

Aby obie strony równania (21.1) były wielomianem stopnia n, funkcja $\alpha(x)$ musi być co najwyżej wielomianem drugiego stopnia, $\beta(x)$ wielomianem pierwszego stopnia, a $\gamma(x)$ stałą

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \\ \beta(x) &= \beta_0 + \beta_1 x \\ \gamma(x) &= \gamma_0\,. \end{aligned} \tag{21.3}$$

Bez straty ogólności możemy położyć $\gamma_0 = 0$, gdyż współczynnik ten przesuwa tylko wartości własne: $\lambda_n \to \lambda_n + \gamma_0$. Oprócz tego możemy zawsze wykonać transformację liniową

$$x = ax' + b\,, \tag{21.4}$$

która pozwala w wygodny sposo ustalić dwa spośród pięciu pozostałych współczynników. Można jeszcze ustalić jeden współczynnik, przeskalowując wielomian

$$W_n'(x) = c\,W_n(x)\,. \tag{21.5}$$

Pozostajemy więc z **dwoma niezależnymi współczynnikami**.

Wykorzystując te uwagi skonstruujemy pełną klasę wielomianów ortogonalnych wyznaczając funkcje (21.3) oraz wagę $w(x)$ tak, by operator L był samosprzężony. Wartości własne λ_n otrzymujemy podstawiając (21.3) do (21.1):

$$(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)\,W_n'' + (\beta_0 + \beta_1 x)\,W_n' \;=\; -\lambda_n\,W_n\,. \tag{21.6}$$

Podstawiając postać (21.2) rozwiązania,

$$\begin{aligned}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)\,(n(n-1)w_n x^{n-2} + \ldots) \;+\; (\beta_0 + \beta_1 x)\,(n w_n x^{n-1} + \ldots)&\\ =\; -\lambda_n\,(w_n x^n + \ldots)\,.&\end{aligned} \tag{21.7}$$

a następnie porównując współczynniki przy potędze x^n, znajdujemy

$$\boxed{\lambda_n = -n(n-1)\,\alpha_2 + n\beta_1} \tag{21.8}$$

Samosprzężoność operatora L oznacza, że waga jest dana wzorem (20.10):

$$w(x)\alpha(x) \,=\, \exp\left\{\int^x \frac{\beta(y)}{\alpha(y)}dy\right\}, \tag{21.9}$$

natomiast warunek (20.21) przyjmuje postać

$$w(x)\alpha(x)\left[W_n^*(x)\,W_m'(x) - W_n^{*\prime}(x)W_m(x)\right]\Big|_a^b = 0\,. \tag{21.10}$$

Ponieważ nie nakładamy żadnych ograniczeń na przestrzeń wielomianów, warunek ten może być spełniony tylko dla

$$w(a)\alpha(a) = w(b)\alpha(b) = 0\,. \tag{21.11}$$

Jeśli $a, b = \pm\infty$ to $w(x)\alpha(x)$ znika szybciej niz dowolna ujemna potęga x.

Tak więc, funkcja $\beta(x)$ nie może być równa zeru, gdyż wtedy z (21.9) wynika, że $w(x)\alpha(x) \equiv 1$. Zachowamy więc $\beta(x)$ w ogólnej formie, natomiast rozważymy trzy przypadki, gdy funkcja $\alpha(x)$ jest

1. funkcją stałą: $\alpha(x) = \alpha_0$
2. funkcją liniową: $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$
3. funkcją kwadratową: $\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$

21.2 Wielomiany Hermite'a

Zakładamy, że $\alpha(x)$ jest *stałą*. Oznacza to, że możemy przyjąc, iż dwa istotne parametry to $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Pozostałe trzy parametry $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$ można wybrać już dowolnie, korzystając z istniejącej swobody parametryzacji. Zapiszmy

$$w(x)\alpha(x) = \exp\left\{\int^x \frac{\beta_0 + \beta_1 y}{\alpha_0} dy\right\} = \exp\left\{\frac{\beta_1}{2\alpha_0}(x + \beta_0/\beta_1)^2\right\}. \qquad (21.12)$$

Wybierając $\alpha_0 = 1$ oraz $\beta_0 = 0$ i $\beta_1 = -2$, dostajemy funkcje

$$\alpha(x) = 1\,, \qquad\qquad \beta(x) = -2x \qquad (21.13)$$

oraz wagę zapewniającą spełnienie warunku samosprzężoności (21.10):

$$w(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \qquad\qquad -\infty < x < \infty\,. \qquad (21.14)$$

Wadze tej odpowiadają **wielomiany Hermite'a**

$$W_n(x) = H_n(x)\,, \qquad (21.15)$$

spełniające warunek ortogonalności dla $n \neq m$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)\, H_m(x)\, \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = 0\,. \qquad (21.16)$$

Tworzą one układ zupełny.

Obliczając z warunku (21.8): $\lambda_n = -2n$, otrzymujemy równanie Hermite'a dla wielomianów H_n:

$$\boxed{H_n'' - 2x\, H_n' + 2n\, H_n = 0} \qquad (21.17)$$

21.3 Wielomiany Lageurre'a

Zakładamy, że $\alpha(x)$ jest *funkcją liniową* i wtedy jeden z istotnych parametrów to $\alpha_2 = 0$. Wybierając $\alpha_0 = 0$ oraz $\alpha_1 = 1$ otrzymujemy

$$\alpha(x) = x\,. \tag{21.18}$$

Po ustaleniu trzech parametrów pozostaje wciąż jeden istotny i jeden swobodny parametr. Rozważmy

$$w(x)\alpha(x) = \exp\left\{\int^x \frac{\beta_0 + \beta_1 y}{y} dy\right\} = x^{\beta_0}\, \mathrm{e}^{\beta_1 x}\,.$$

Wybierając $\beta_1 = -1$ oraz parametryzując $\beta_0 = s+1$, dostajemy

$$\beta(x) = s+1-x\,. \tag{21.19}$$

Stąd waga zapewniająca warunek smosprzężoności,

$$w(x) = x^s\,\mathrm{e}^{-x} \qquad\qquad x \geqslant 0\,, \tag{21.20}$$

dla **stowarzyszonych wielomianów Lageurre'a**

$$W_n(x) = L_n^{(s)}(x)\,. \tag{21.21}$$

Są one ortogonalne dla $s > -1$, tzn. dla $n \neq m$ zachodzi

$$\int_0^\infty L_n^{(s)}(x)\,L_m^{(s)}(x)\,\mathrm{e}^{-x}x^s\,dx = 0\,. \tag{21.22}$$

Wielomiany Lageurre'a **nie tworzą układu zupełnego**.

Wyliczając $\lambda_n = -n$, otrzymujemy stowarzyszone równanie Lageurre'a

$$\boxed{x\,L_n^{(s)\prime\prime} + (s+1-x)\,L_n^{(s)\prime} + n\,L_n^{(s)} = 0\,.} \tag{21.23}$$

Dla $s = 0$ otrzymujemy zwykłe wielomiany Lageurre'a $L_n(x)$ spełniające powyższe równanie z $s = 0$

$$x\,L_n'' + (1-x)\,L_n' + n\,L_n = 0\,. \tag{21.24}$$

Dla całkowitych $s > 0$ są one związane ze stowarzyszonymi wielomianami Lageurre'a wzorem

$$L_n^{(s)}(x) = (-1)^s\,\frac{d^s}{dx^s}L_{n+s}(x)\,. \tag{21.25}$$

21.4 Wielomiany Jacobiego

Zakładamy, że $\alpha(x)$ jest *funkcją kwadratową*. Wykorzystując swobodę parametryzacji kładziemy: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ oraz $a_2 = -1$. Wtedy

$$\alpha(x) = 1 - x^2 . \tag{21.26}$$

Dwa parametry funkcji β są więc istotnymi parametrami. Wprowadzając nowe oznaczenia

$$\beta(x) = (q-p) - (p+q+2)x , \tag{21.27}$$

otrzymamy

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \frac{(q-p)-(p+q+2)x}{1-x^2} = \frac{q+1}{1+x} - \frac{p+1}{1-x} .$$

Wtedy

$$w(x)\alpha(x) = \exp\left\{ \int^x \frac{\beta(y)}{\alpha(y)} dy \right\} = (1-x)^{p+1} (1+x)^{q+1}$$

i stąd następująca postać wagi dla $p, q > -1$:

$$w(x) = (1-x)^p (1+x)^q , \qquad |x| \leqslant 1 . \tag{21.28}$$

Wadze tej odpowiadają **wielomiany Jacobiego**

$$W_n(x) = J_n^{(p,q)}(x) , \tag{21.29}$$

spełniające warunek ortogonalności dla $n \neq m$

$$\int_{-1}^{1} J_n^{(p,q)}(x)\, J_m^{(p,q)}(x)\, (1-x)^{p+1} (1+x)^{q+1} \, dx = 0 . \tag{21.30}$$

Wielomiany Jacobiego **tworzą układ zupełny**.

Wyliczając, $\lambda_n = -n(n+p+q+1)$, stwierdzamy, że spełnione jest następujące równanie Jacobiego

$$\boxed{(1-x^2)\, J_n^{(p,q)\prime\prime} + [q-p-(p+q+2)x]\, J_n^{(p,q)\prime} + J_n^{(p,q)}\, n(n+p+q+1) = 0} \tag{21.31}$$

Przedstawiona analiza wyczerpuje listę wszystkich możliwych wielomianów ortogonalnych w zagadnieniu Sturma–Liouville'a. Rozważmy jeszcze szczególne przypadki wielomianów Jacobiego.

21.4.1 Wielomiany Gegenbauera

Dla $p = q = (m - 1/2) > -1$ otrzymujemy wielomiany Gegenbauera

$$G_n^{(m)}(x) = J_n^{(m-1/2, m-1/2)}(x)\,. \tag{21.32}$$

spełniające równanie

$$\boxed{(1 - x^2)\, G_n^{(m)\prime\prime} - (2m+1)x\, G_n^{(m)\prime} + n(n+2m)\, G_n^{(m)} = 0} \tag{21.33}$$

Są one ortogonalne wzgędem następującego iloczynu skalarnego

$$\int_{-1}^{1} G_n^{(m)}(x)\, G_k^{(m)}(x)\, (1-x^2)^{m-1/2}\, dx = C_n \delta_{nk}\,. \tag{21.34}$$

21.4.2 Wielomiany Czebyszewa

Dla $m = 0$ mamy wielomiany Czebyszewa

$$T_n(x) = J_n^{(-1/2, -1/2)}(x)\,. \tag{21.35}$$

spełniające równanie

$$\boxed{(1 - x^2)\, T_n'' - x\, T_n' + n^2\, T_n = 0} \tag{21.36}$$

oraz relację ortogonalności

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_k(x)\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C_n \delta_{nk}\,. \tag{21.37}$$

21.4.3 Wielomiany Legendre'a

W końcu, dla $p = q = 0$ dostajemy wielomiany Legendre'a

$$P_n(x) = J_n^{(0,0)}(x)\,, \tag{21.38}$$

które spełniają równanie

$$\boxed{(1 - x^2)\, P_n'' - 2x\, P_n' + n(n+1)\, P_n = 0} \tag{21.39}$$

a także relację ortogonalności

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_k(x)\, dx = C_n \delta_{nk}\,. \tag{21.40}$$

Współczynniki normalizacyjne C_n są podane w Tablicy 21.5.

Wielomiany	W_n	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	λ_n
Hermite'a	H_n	1	$-2x$	$2n$
Laguerre'a	$L_n^{(s)}$	x	$s+1-x$	n
Jacobiego	$J_n^{(p,q)}$	$1-x^2$	$(q-p)-(p+q+2)x$	$n\,(n+p+q+1)$
Gegenbauera	$G_n^{(m)}$	$1-x^2$	$-(2m+1)x$	$n\,(n+2m)$
Czebyszewa	T_n	$1-x^2$	$-x$	n^2
Legendre'a	P_n	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$

Tablica 21.1: Funkcje i wartości własne w równaniu różniczkowym (21.41). Parametry wielomianów: $p,q > -1$, $m > -1/2$ i $s > -1$.

21.5 Podsumowanie

Podsumowaniem są dwie tabelki. W pierwszej z nich podajemy funkcje $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ oraz wartości własne λ_n dla równania, które spełniają wielomiany

$$\alpha(x)\,W_n'' + \beta(x)\,W_n' + \lambda_n W_n = 0\,. \tag{21.41}$$

W drugiej tabelce specyfikujemy wagę $w(x)$, przedział całkowania $[a,b]$ oraz współczynnik normalizacyjny C_n w relacji ortogonalności

$$\langle W_n|W_m\rangle = \int_a^b W_n(x)\,W_m(x)\,w(x)\,dx = C_n\,\delta_{nm}\,. \tag{21.42}$$

Przedstawione zagadnienia Sturma–Liouville'a są osobliwe i wielomiany nie muszą tworzyć układów zupełnych. Tak jest dla wielomianów Lageurre'a, natomiast reszta wielomianów tworzy układy zupełne. Wtedy dla dowolnej funkcji rzeczywistej $f(x)$, określonej na przedziale $[a,b]$ i całkowalnej z kwadratem, zachodzi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,W_n(x)\,, \tag{21.43}$$

gdzie równość należy rozumieć w sensie wartości średniej

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\,W_n(x)\right|^2 w(x)\,dx = 0\,. \tag{21.44}$$

Współczynniki rozwinięcia obliczymy wykorzystując warunek ortogonalności wielomianów

$$a_n = \frac{1}{C_n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, W_n(x)\, w(x)\, dx\,. \tag{21.45}$$

Z warunku ortogonalności wynika *równość Parsevala*

$$\int_a^b f^2(x)\, w(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, a_n^2\,. \tag{21.46}$$

Wielomiany	W_n	$w(x)$	$[a,b]$	C_n
Hermite'a	H_n	e^{-x^2}	$[-\infty,\infty]$	$\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!$
Laguerre'a	$L_n^{(s)}$	$x^s\, \mathrm{e}^{-x}$	$[0,\infty]$	$\Gamma(s+n+1)/n!$
Jacobiego	$J_n^{(p,q)}$	$(1-x)^p\,(1+x)^q$	$[-1,1]$	$\frac{2^{p+q+1}\Gamma(n+p+1)\Gamma(n+q+1)}{n!(2n+p+q+1)\Gamma(n+p+q+1)}$
Gegenbauera	$G_n^{(m)}$	$\left(1-x^2\right)^{m-1/2}$	$[-1,1]$	$\frac{2^{2m-1}\Gamma^2(n+m+1/2)}{n!(n+m)\Gamma(n+2m)}$
Czebyszewa	T_n	$\left(1-x^2\right)^{-1/2}$	$[-1,1]$	$\pi/2\,(1+\delta_{n0})$
Legendre'a	P_n	1	$[-1,1]$	$2/(2n+1)$

Tablica 21.2: Funkcje wagowe, granice całkowanie oraz współczynnik normalizacyjny w iloczynie skalarnym (21.42).

Wykład 22

Szeregi Fouriera

22.1 Problem własny

Zilustrujemy rozwiązywanie zagadnienia Sturma-Liouville'a na przykładzie operatora $\hat{L} = d^2/dx^2$,

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lambda\, f(x)\,, \tag{22.1}$$

działającego w przestrzeni funkcji *rzeczywistych*, określonych dla $x \in [-L, L]$ i spełniających warunki brzegowe

$$f(-L) = f(L)\,, \qquad\qquad f'(-L) = f'(L). \tag{22.2}$$

Dla tego operatora mamy $p(x) = w(x) = 1$. Stąd iloczyn skalarny jest zadany przez

$$\langle f|g\rangle = \int\limits_{-L}^{L} f(x)\, g(x)\, dx\,. \tag{22.3}$$

Warunek samosprzężoności (13.39) jest spełniony na mocy warunków brzegowych

$$\left[f(x)g'(x) - f'(x)g(x)\right]\Big|_{-L}^{L} = 0\,. \tag{22.4}$$

Operator $\hat{L}$ jest więc samosprzężony

$$\left\langle f|\hat{L}g\right\rangle = \int\limits_{-L}^{L} f(x)\, g''(x)\, dx = \int\limits_{-L}^{L} f''(x)\, g(x)\, dx = \left\langle \hat{L}f|g\right\rangle \tag{22.5}$$

i wartości własne λ w równaniu (22.1) są *rzeczywiste*. Rozpatrzmy trzy przypadki.

1. Dla $\lambda = 0$, otrzymujemy jako rozwiązanie ogólne

$$f(x) = c_1 + c_2 x\,. \tag{22.6}$$

Warunki brzegowe (22.2) prowadzą do równania

$$c_1 - c_2 L = c_1 + c_2 L \tag{22.7}$$

przy dowolnym współczynniku c_1. Stąd $c_2 = 0$ i następująca funkcja własna

$$f_0(x) = c_1 = 1\,. \tag{22.8}$$

2. Dla $\lambda = \mu^2 > 0$, rozwiązanie ogólne równania (22.1) to

$$f(x) = c_1\,\mathrm{e}^{\mu x} + c_2\,\mathrm{e}^{-\mu x}\,. \tag{22.9}$$

Nakładając warunki brzegowe otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} c_1\,\mathrm{e}^{-\mu L} + c_2\,\mathrm{e}^{\mu L} &= c_1\,\mathrm{e}^{\mu L} + c_2\,\mathrm{e}^{-\mu L} \\ c_1\,\mathrm{e}^{-\mu L} - c_2\,\mathrm{e}^{\mu L} &= c_1\,\mathrm{e}^{\mu L} - c_2\,\mathrm{e}^{-\mu L}\,, \end{aligned} \tag{22.10}$$

który prowadzi do

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{-\mu L} - \mathrm{e}^{\mu L})\,(c_1 - c_2) &= 0 \\ (\mathrm{e}^{-\mu L} - \mathrm{e}^{\mu L})\,(c_1 + c_2) &= 0\,. \end{aligned} \tag{22.11}$$

Ponieważ $\mu \neq 0$ możemy podzielić oba równania przez $(\mathrm{e}^{-\mu L} - \mathrm{e}^{\mu L})$ otrzymując jako rozwiązanie $c_1 = c_2 = 0$. Nie istnieje więc niezerowa funkcja własna dla dodatnich wartości własnych.

3. Pozostaje przypadek $\lambda = -\mu^2 < 0$. Rozwiązaniem ogólnym jest wtedy

$$f(x) = c_1 \sin(\mu x) + c_2 \cos(\mu x)\,. \tag{22.12}$$

Warunki brzegowe (22.2) prowadzą do układu równań

$$\begin{aligned} -c_1 \sin(\mu L) + c_2 \cos(\mu L) &= c_1 \sin(\mu L) + c_2 \cos(\mu L) \\ c_1 \cos(\mu L) + c_2 \sin(\mu L) &= c_1 \cos(\mu L) - c_2 \sin(\mu L)\,, \end{aligned} \tag{22.13}$$

z którego wynika

$$c_1 \sin(\mu L) = 0\,, \qquad c_2 \sin(\mu L) = 0\,. \tag{22.14}$$

Stąd niezerowe rozwiązanie dla

$$\mu = n\pi/L\,, \tag{22.15}$$

gdzie $n \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą.

Otrzymaliśmy więc wartości własne

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,. \tag{22.16}$$

Odpowiadające im liniowo niezależne funkcje własne to

$$f_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}\,, \qquad\qquad f_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}\,. \tag{22.17}$$

Wartości własne dla $n \geqslant 1$ są dwukrotnie zdegenerowane. Powyższe wzory obejmują przypadek $n = 0$, gdyż wtedy pierwsza funkcja wynosi $f_0(x) = 1$.

Równanie (22.1) z wartościami własnymi (22.16),

$$\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\, f_n(x) \,=\, 0\,, \tag{22.18}$$

jest równaniem klasycznego oscylatora harmonicznego z częstościami własnymi

$$k_n = n\frac{\pi}{L}\,, \tag{22.19}$$

będącymi całkowitą wielokrotnością częstości podstawowej π/L. Funkcje własne (22.17) opisują drgania *harmoniczne* z częstościami własnymi. Okresem drgań jest $2L$. Jeżeli x jest zmienną przestrzenną to $2L = \lambda$ jest długością fali, natomiast gdy x jest czasem to $2L = T$ jest okresem drgań.

22.2 Ortogonalność funkcji własnych

Na podstawie własności operatorów samosprzężonych, układ funkcji własnych jest *ortogonalny* dla $n \neq m$

$$\boxed{\langle f_n | f_m \rangle = \int\limits_{-L}^{L} f_n(x) f_m(x)\, dx \,=\, C_n\, \delta_{nm}} \tag{22.20}$$

Ortogonalne są także funkcje własne do tej samej wartości własnej λ_n,

$$\int\limits_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-L}^{L} \sin\frac{2n\pi x}{L}\,dx = 0\,. \tag{22.21}$$

Wykorzystując wzory

$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1-\cos\alpha)\,, \qquad \cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha) \tag{22.22}$$

łatwo pokazać, że współczynniki normalizacyjne C_n dla $n \geqslant 1$ to

$$C_n = \langle f_n | f_n \rangle = L\,, \tag{22.23}$$

natomiast dla $n=0$ znajdujemy

$$C_0 = \langle f_0 | f_0 \rangle = \int_{-L}^{L} dx = 2L\,. \tag{22.24}$$

22.3 Szereg Fouriera

Rozważmy **funkcję okresową** o okresie $2L$:

$$f(x+2L) = f(x)\,. \tag{22.25}$$

Wtedy $f(-L) = f(L)$ i w przedziale $[-L, L]$ możemy rozwinąć $f(x)$ w szereg Fouriera funkcji własnych (22.17):

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)} \tag{22.26}$$

Wzór ten można rozszerzyć na całą oś rzeczywistą, na podstawie warunku okresowości. Całkując obie stronu równości (22.26) w granicach $\pm L$ znajdujemy wartość wspólczynnika a_0:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\,dx\,. \tag{22.27}$$

Wspólczynniki dla $n \geqslant 1$ znajdziemy mnożąc obie strony przez $\cos(n\pi x/L)$ oraz $\sin(n\pi x/L)$, a następnie całkując w tych samych granicach i wykorzystując warunek ortogonalności (22.20). Stąd

$$a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{22.28}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\,. \tag{22.29}$$

Szereg Fouriera dostarcza rozkładu funkcji okresowej na sumę drgań harmonicznych. Współczynniki szeregu są wyrażone przez całki z funkcji $f(x)$. Powoduje to, że istnienie zbieżnego szeregu Fouriera wymaga dużo słabszych założeń co do funkcji $f(x)$ niż w przypadku szeregu Taylora, gdy żądamy by istniały pochodne dowolnie wysokiego rzędu.

Zauważmy, że dla **funkcji parzystych**, spełniających $f(-x) = f(x)$, każdy współczynnik $b_n = 0$ i wtedy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \tag{22.30}$$

ze współczynnikami

$$a_0 = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\,dx\,, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,. \tag{22.31}$$

Podobnie dla **funkcji nieparzystych**, dla których $f(-x) = -f(x)$, wszystkie współczynniki $a_n = 0$ i wtedy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{22.32}$$

ze współczynnikami

$$b_n = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\,. \tag{22.33}$$

22.4 Zbieżność szeregu Fouriera

Wyjaśnienia wymaga problem zbieżność szeregu Fouriera. Odpowiedzią jest

Twierdzenie Dirichleta

Jeżeli funkcja okresowa $f(x+2L) = f(x)$ ma w przedziale $[-L,L]$ skończoną liczbę ekstremów i punktów nieciągłości x_i, w których istnieją granice jednostrone $f(x_i+)$ i $f(x_i-)$ oraz funkcja jest kawałkami gładka w przedziałach (x_i, x_{i+1}) to szereg Fouriera jest zbieżny punktowo do wartości $f(x)$ w punktach ciągłości, natomiast w punktach nieciągłości jest zbieżny do średniej

$$\tfrac{1}{2}[f(x_i+) + f(x_i-)]. \tag{22.34}$$

Warunki Dirichleta są wystarczające, ale nie konieczne do zbieżności szeregu. Istnieją funkcje, które ich nie spełniają, a mimo to szereg Fouriera jest zbieżny.

Przy założeniach Dirichleta, szereg Fouriera można całkować wyraz po wyrazie, a w przedziałach otwartych (x_i, x_{i+1}) można go podobnie różniczkować. Własność ta jest konsekwencją tego, że szereg Fouriera jest *jednostajnie* zbieżny w każdym podprzedziale domkniętym przedziału (x_i, x_{i+1}), natomiast w przedziale $[-L,L]$ jest zbieżny w *sensie wartości średniej.*

22.5 Przykłady rozwinięć

1. Znajdźmy rozwinięcie Fouriera funkcji okresowej $f(x+2) = f(x)$ zadaną w przedziale $(-1,1]$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x \leqslant 0 \\ 1 & 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \tag{22.35}$$

Funkcja jest nieparzysta i niezerowe współczynniki to

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sin y\, dy \\ &= \frac{2}{n\pi}\,(-\cos y)\big|_0^{n\pi} = \frac{2}{n\pi}\,(1-(-1)^n) \end{aligned} \tag{22.36}$$

Pozostają tylko nieparzyste współczynniki

$$b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi} \tag{22.37}$$

dla $k = 0,1,2,\ldots$ i stąd rozwinięcie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)\pi x\,. \tag{22.38}$$

Zgodnie ze wzorem (22.34) w punktach nieciągłości funkcji w $x = 0, \pm 1$ szereg Fouriera jest zbieżny do wartości

$$\tfrac{1}{2}(-1+1) = 0\,. \tag{22.39}$$

Różniczkując szereg (22.38) otrzymamy

$$4\sum_{k=0}^{\infty} \cos(2k+1)\pi x \,=\, 0\,. \tag{22.40}$$

Szereg ten jest zbieżny do zera w każdym podprzedziale nie zawierającym punktów nieciągłości funkcji $f(x)$. W punktach tych szereg jest rozbieżny.

2. Rozważmy funkcję okresową $f(x+2) = f(x)$ zadaną w przedziale $(-1,1]$ wzorem

$$f(x) = x \qquad -1 < x \leqslant 1 \tag{22.41}$$

Funkcja jest nieparzysta więc otrzymujemy rozwinięcie w szereg sinusów ze współczynnikami

$$\begin{aligned} b_n \;&=\; 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx = \frac{2}{(n\pi)^2}\int_0^{n\pi} y\sin y\,dy \\ &=\; \frac{2}{(n\pi)^2}\,(-y\cos y + \sin y)\big|_0^{n\pi} = (-1)^{n+1}\,\frac{2}{n\pi} \end{aligned} \tag{22.42}$$

Stąd dla $x \in (-1,1)$ zachodzi

$$x \,=\, \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{2}{n\pi}\,\sin(n\pi x)\,. \tag{22.43}$$

W punktach nieciągłości funkcji $f(x)$ szereg Fouriera daje średnią z granic prawo- i lewostronnej równą zeru. Różniczkując szereg wyraz po wyrazie dla $x \in (-1,1)$ znajdujemy

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos(n\pi x) \,=\, 1\,. \tag{22.44}$$

22.6 Równość Parsevala

Rozważmy ogólnie rozwinięcie

$$f(x) = \sum_n^\infty a_n f_n(x)\,, \tag{22.45}$$

gdzie funkcje bazowe f_n spełniają warunek ortogonalności

$$\langle f_n | f_m \rangle = C_n \delta_{nm}\,, \qquad C_n \in \mathbb{R}\,. \tag{22.46}$$

Zbieżność szeregu w (22.45) do funkcji $f(x)$ w sensie wartości średniej oznacza, że dla ciągu sum częsciowych

$$S_N(x) = \sum_n^N a_n f_n(x), \tag{22.47}$$

zachodzi

$$\lim_{N\to\infty} \langle f - S_N | f - S_N \rangle = 0\,. \tag{22.48}$$

Policzmy następnie

$$\langle f - S_N | f - S_N \rangle = \langle f|f \rangle - \langle f|S_N \rangle - \langle S_N|f \rangle + \langle S_N|S_N \rangle \geqslant 0\,. \tag{22.49}$$

Korzystając z własności ortogonalności (22.46), znajdujemy

$$\langle f|S_N \rangle = \sum_n^N C_n |a_n|^2 = \langle S_N|f \rangle = \langle S_N|S_N \rangle\,. \tag{22.50}$$

Stąd po podstawieniu do (22.49) otrzymujemy *nierówność Bessela*

$$\langle f|f \rangle \geqslant \sum_n^N C_n |a_n|^2\,. \tag{22.51}$$

Warunek zbieżności w sensie wartości średniej (22.48) prowadzi w granicy $N \to \infty$ do *równości Parsevala*

$$\boxed{\langle f|f \rangle = \sum_n^\infty C_n |a_n|^2} \tag{22.52}$$

Szeregi Fouriera są zbieżne w sensie wartości średniej, tak więc wzór (22.52) przyjmuje postać

$$\int\limits_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = 2L\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + L\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{22.53}$$

i stąd następująca postać równości Parsevala

$$\boxed{\frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)} \tag{22.54}$$

22.7 Obliczanie sum szeregów

Równość Parsevala możemy wykorzystać do obliczania sum szeregów.

1. Dla funkcji (22.35) ze współczynnikami (22.37) dostajemy

$$\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}^2\,,$$

co daje

$$2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{(2k+1)^2\pi^2}\,.$$

Stąd suma odwrotności kwadratów nieparzystych liczb całkowitych wynosi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,. \tag{22.55}$$

2. Dla funkcji (22.41) ze współczynnikami (22.43) dostajemy

$$\int\limits_{-1}^{1} x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\,,$$

co daje

$$\frac{2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}\,.$$

Stąd znany już wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{22.56}$$

Wykład 23

Transformaty całkowe I

23.1 Zespolona postać szeregu Fouriera

Wyprowadźmy zespoloną postać szeregu Fouriera. Definiując $k_n = n\pi/L$ oraz wykorzystując relacje

$$\cos(k_n x) = \frac{e^{ik_n x} + e^{-ik_n x}}{2} \qquad \sin(k_n x) = \frac{e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}}{2i},$$

możemy zapisać szereg Fouriera w postaci

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{2} \left(e^{ik_n x} + e^{-ik_n x} \right) + \frac{b_n}{2i} \left(e^{ik_n x} - e^{-ik_n x} \right) \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{ik_n x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-ik_n x} \right\}. \end{aligned} \tag{23.1}$$

Definiując następnie współczynniki

$$\begin{aligned} c_0 &= \tfrac{1}{2} a_0 \\ c_n &= \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n), \qquad n \geqslant 1 \\ c_{-n} &= \tfrac{1}{2}(a_n + ib_n) = c_n^* \end{aligned} \tag{23.2}$$

znajdujemy zespoloną formę szeregu Fouriera

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{ik_n x}} \tag{23.3}$$

gdzie $k_{-n} = -k_n$. Współczynniki rozwinięcia obliczymy ze wzorów (22.29)

$$c_n = \tfrac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(k_n x)\, dx - \frac{i}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(k_n x)\, dx\,,$$

co daje

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, \mathrm{e}^{-ik_n x}\, dx} \tag{23.4}$$

23.2 Transformata Fouriera

Transformata Fouriera jest uogólnieniem szeregu Fouriera, gdy okres funkcji $f(x)$ dąży do nieskończoności ($2L \to \infty$). W granicy tej funkcja przestaje być okresową i jest funkcją określoną na całej osi rzeczywistej $\mathbb{R}$.

Rozważmy zespoloną postać szeregu Fouriera (23.3). Wprowadzając oznaczenie

$$\Delta k = \frac{\pi}{L}\,, \tag{23.5}$$

a następnie podstawiając $L = \pi/\Delta k$ we wzorze (23.4), dostaniemy

$$c_n = \frac{\Delta k}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta k}^{\pi/\Delta k} f(u)\, \mathrm{e}^{-in\Delta k\, u}\, du\,, \tag{23.6}$$

gdzie dodatkowo zmieniliśmy oznaczenie zmiennej całkowania z x nad u. Podstawiając do (23.3), znajdujemy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\pi/\Delta k}^{\pi/\Delta k} f(u)\, \mathrm{e}^{in\Delta k\,(x-u)}\, du\right\}\Delta k \tag{23.7}$$

Oznaczając funkcję w nawiasie przez

$$F(n\,\Delta k\,,x) = \int\limits_{-\pi/\Delta k}^{\pi/\Delta k} f(u)\,\mathrm{e}^{in\Delta k\,(x-u)}\,du\,, \tag{23.8}$$

otrzymujemy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\,\Delta k\,,x)\;\Delta k\,. \tag{23.9}$$

W granicy $\Delta k \to 0$ ($L \to \infty$) suma ta dąży do całki Riemanna

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\,F(k,x)\,, \tag{23.10}$$

gdzie funkcja

$$F(k,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} du\,f(u)\,\mathrm{e}^{ik\,(x-u)}\,. \tag{23.11}$$

Stąd podstawowy wzór w teorii transformat Fouriera

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\,\mathrm{e}^{ikx}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du\,f(u)\,\mathrm{e}^{-iku} \tag{23.12}$$

Prowadzi on do następującej definicji transformaty Fouriera po zamianie oznaczeń $u \to x$.

Definicja
Transformata Fouriera $F(k)$ funkcji $f(x)$ to

$$\boxed{F(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,f(x)\,\mathrm{e}^{-ik\,x}} \tag{23.13}$$

Na podstawie (23.12) relacja odwrotna ma postać

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\,F(k)\,\mathrm{e}^{ik\,x}} \tag{23.14}$$

Ostatni wzór jest poszukiwanym uogólnieniem rozwinięcia w szereg Fouriera, gdy okres funkcji $f(x)$ dąży do nieskończoności.

Warunkiem wystaczającym istnienia transformaty Fouriera jest by $f(x)$ była kawałkami gładka na osi rzeczywistej oraz by funkcja $|f(x)|$ była całkowalna w granicach od minus do plus nieskończoności.

Podsumujmy szeregi i transformaty Fouriera tabelką.

	Szeregi Fouriera	Transformata Fouriera
Funkcja	$f(x+2L) = f(x)$	$f(x)$ dowolna
Rozkład	$f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{ik_n x}$	$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \, F(k) \, \mathrm{e}^{ikx}$
Wzór odwrotny	$c_n = \frac{1}{2L} \int\limits_{-L}^{L} dx \, f(x) \, \mathrm{e}^{-ik_n x}$	$F(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) \, \mathrm{e}^{-ikx}$

23.3 Splot funkcji

Wygodne jest następujące oznaczenie na transformatę Fouriera oraz relację odwrotną

$$\mathcal{F}[f](k) = F(k), \qquad \mathcal{F}^{-1}[F](x) = f(x). \tag{23.15}$$

Zdefiniujmy splot dwóch funkcji f i g jako nową funkcję zadaną wzorem

$$(f \star g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \, f(u) \, g(x-u). \tag{23.16}$$

Policzmy następnie transformatę Fouriera splotu

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[(f \star g)](k) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \, (f \star g)(x) \, \mathrm{e}^{-ikx} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \, f(u) \, g(x-u) \right\} \mathrm{e}^{-ikx} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \, f(u) \, \mathrm{e}^{-iku} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \, g(x-u) \, \mathrm{e}^{-ik(x-u)} \\
&= F(k) \, G(k).
\end{aligned} \tag{23.17}$$

Tak więc, transformata Fouriera splotu dwóch funkcji to iloczyn ich transformat Fouriera.

23.4 Delta Diraca

Zauważmy, że zmieniając kolejność całkowania we wzorze (23.12), otrzymamy

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{ik(x-u)} \right\} f(u) \tag{23.18}$$

Wyrażenie w nawiasie możemy traktować jako *deltę Diraca*

$$\boxed{\delta(x-u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{ik(x-u)}} \tag{23.19}$$

której podstawową własnością jest równanie

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} du\, \delta(x-u)\, f(u)\,. \tag{23.20}$$

Ściśle rzecz biorąc zamiana kolejności całkowania w (23.12) jest niedozwolona, jednak otrzymanymi wzorami można się posługiwać w rachunkach. Trzeba tylko pamiętać, że zgodnie ze wzorem (23.20) delta Diraca $\delta(x-u)$ nie jest zwykła funkcją lecz operacją liniową (dystrybucją), która funkcji f przyporządkowuje liczbę - wartość $f(x)$. Operowanie deltą Diraca ma więc sens tylko w wyrażeniach całkowych.

Jako pożyteczne ćwiczenie znajdziemy odpowiednik równości Parsevala dla transformaty Fouriera:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, |f(x)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, F^*(k)\, \mathrm{e}^{-ikx} \right\} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk'\, F(k')\, \mathrm{e}^{ik'x} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk'\, F^*(k)\, F(k') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{i(k'-k)x} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, F^*(k) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk'\, F(k')\, \delta(k'-k) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, |F(k)|^2
\end{aligned} \tag{23.21}$$

Stąd ostatecznie równość Parsevala dla transformat Fouriera to

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,|f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\,|F(k)|^2} \tag{23.22}$$

Wykład 24

Transformaty całkowe II

24.1 Transformata Fouriera

Niech $f(t)$ będzie funkcją o wartościach zespolonych, określoną na osi rzeczywistej: $-\infty < t < \infty$. Transformata Fouriera tej funkcji to

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t} f(t)\, dt \tag{24.1}$$

gdzie ω jest liczbą zespoloną. Relacja odwrotna to

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t} F(\omega)\, d\omega \tag{24.2}$$

Zmieniając $t \to -t$, a także sprzęgając równanie (24.1) otrzymujemy następujące relacje

$$f(t) \quad \leftrightarrow \quad F(\omega) \tag{24.3}$$

$$f(-t) \quad \leftrightarrow \quad F(-\omega) \tag{24.4}$$

$$f^*(t) \quad \leftrightarrow \quad F^*(-\omega) \tag{24.5}$$

24.1.1 Wzory konwolucyjne

Wprowadzimy następnie wzór konwolucyjny dla transformat $F(\omega)$ i $G(\omega)$ funkcji $f(t)$ i $g(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t} F(\omega) G(\omega)\, d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) \mathrm{e}^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t'} g(t')\, dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, g(t') \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) \mathrm{e}^{-i\omega(t-t')} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') g(t')\, dt' \qquad (24.6)
\end{aligned}$$

Stąd transformata Fouriera splotu dwóch funkcji, $f \star g$, jest iloczynem transformat Fouriera

$$(f \star g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') g(t')\, dt' \quad \leftrightarrow \quad F(\omega)\, G(\omega) \qquad (24.7)$$

Kładąc $t = 0$ we wzorze (24.6) znajdujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t') g(t')\, dt' \qquad (24.8)$$

Na podstawie relacji (24.4) mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega) G(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t')\, dt' \qquad (24.9)$$

Przyjmując $f(t') = g^*(t')$ i wykorzystując relację (24.5), otrzymujemy równość Parsevala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t')|^2\, dt' \qquad (24.10)$$

Obliczmy jeszcze transformatę Fouriera iloczyny dwóch funkcji

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \mathrm{e}^{i\omega t} f(t)\, g(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \mathrm{e}^{i\omega t} f(t) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-i\omega' t}\, G(\omega') \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, G(\omega') \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{i(\omega-\omega')t} f(t) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, F(\omega-\omega')\, G(\omega') \qquad (24.11)
\end{aligned}$$

Odwracając transformatę Fouriera ze względu na zmienną ω znajdujemy następującą reprezentację iloczynu dwóch funkcji

$$f(t)\, g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \mathrm{e}^{-i\omega t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, F(\omega-\omega')\, G(\omega')\,. \qquad (24.12)$$

24.2 Transformata Laplace'a

Transformata Laplace'a funkcji $f(t)$ o wartościach zespolonych i argumencie rzeczywistym $t > 0$ jest określona poprzez całkę

$$F(s) = \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt \qquad (24.13)$$

gdzie s jest liczbą zespoloną. Łatwo zauważyć, że jest to transformata Fouriera następującej funkcji

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{dla} \quad t > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \end{cases} \qquad (24.14)$$

gdzie dodatkowo przyjmujemy, że $s = -i\omega$:

$$\tilde{F}(\omega = is) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \tilde{f}(t)\, dt = \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt = F(s) \qquad (24.15)$$

Powstaje pytanie dla jakich wartości zespolonego s całka (24.13) jest zbieżna. Odpowiedzią jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie
Jeśli całka (24.13) jest zbieżna dla pewnego $s = s_0$ *to jest zbieżna dla wszystkich* s *takich, że* $\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, s_0$.

Dla dowodu zapiszmy

$$F(s) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathrm{e}^{-(s-s_0)t}\, \mathrm{e}^{-s_0 t} f(t)\, dt \tag{24.16}$$

Zdefiniujmy następnie funkcję

$$\phi(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-s_0 t'} f(t')\, dt' \tag{24.17}$$

Funkcja ta jest ograniczona dla każdego t ze względu na założenie twierdzenia, a ponadto $\phi(0) = 0$. Wykonując całkowanie przez części we wzorze (24.16) otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{T\to\infty} \int_0^T \mathrm{e}^{-(s-s_0)t}\, d\phi(t) \\ &= \lim_{T\to\infty} \left\{ \mathrm{e}^{-(s-s_0)t}\, \phi(t)\Big|_0^T + \int_0^T (s - s_0)\, \mathrm{e}^{-(s-s_0)t}\, \phi(t) dt \right\} \end{aligned}$$

W granicy, pierwszy wyraz znika ze względu na ograniczoność $\phi(t)$, natomiast całka jest zbieżna dla $\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, s_0$, co kończy dowód. Otrzymujemy w ten sposób półpłaszczyznę zbieżności transformaty $F(s)$. Całka Laplace'a jest *jednostajnie zbieżna* w dowolnym obszarze zawartym w tej półpłaszczyźnie.

Transformata $F(s)$ jest także *analityczna* w tym obszarze, jak i w każdym innym do którego można ją przedłużyć analitycznie. Licząc bowiem dla ustalonego T pochodną funkcji $\int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t) dt$ stwierdzamy, że jest ona analityczna dla każdego s z półpłaszczyzny zbieżności. Własność jednostajnej zbieżności oznacza, że otrzymana w granicy $T \to \infty$ transformata $F(s)$ jest także analityczna.

Znajdziemy następnie wzór odwrotny dla transformaty Laplace'a wykorzystując jej związek z transformatą Fouriera. Wybierając dowolny punkt $s = \gamma - i\omega$ w płaszczyźnie zbieżności transformaty Laplace'a przepiszemy wzór (24.13) w postaci

$$F(\gamma - i\omega) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-(\gamma - i\omega)t} f(t)\, dt \tag{24.18}$$

Definiując następnie funkcję

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\gamma t} f(t) & \text{dla} \quad t > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \end{cases} \tag{24.19}$$

otrzymujemy transformatę Fouriera

$$F(\gamma - i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\omega t} \tilde{f}(t)\, dt \tag{24.20}$$

Stąd odwrotna transformata Fouriera

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t} F(\gamma - i\omega)\, d\omega \tag{24.21}$$

i dla $t > 0$ znajdujemy po zamianie zmiennej $s = \gamma - i\omega$

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\gamma t} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega t} F(\gamma - i\omega)\, d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \mathrm{e}^{(s-\gamma)t} F(s)\, ds \end{aligned} \tag{24.22}$$

Kontur całkowania ostatniej całce: $\gamma + i\nu$; $\nu \in \mathrm{z} \in \mathcal{R}$, leży w półpłaszczyźnie zbieżności transformaty Laplace'a i może być zdeformowany do dowolnego konturu C rozciągającego się wzdłuż calej osi urojonej. Stąd ostateczny wzór odwrotny dla transformaty Laplace'a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \mathrm{e}^{st} F(s)\, ds \tag{24.23}$$

24.2.1 Wzory konwolucyjne

Niech $F(s)$ i $G(s)$ będą transformatami Laplace'a funkcji $f(t)$ i $g(t)$, odpowiednio. Obliczmy

$$\begin{aligned}
\int\limits_C \frac{ds}{2\pi i}\, \mathrm{e}^{st} F(s)\, G(s) &= \int\limits_C \frac{ds}{2\pi i}\, \mathrm{e}^{st} F(s) \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st'} g(t')\, dt' \\
&= \int\limits_0^\infty dt' g(t') \int\limits_C \frac{ds}{2\pi i}\, \mathrm{e}^{s(t-t')} F(s) \\
&= \int\limits_0^\infty dt' f(t-t')\, g(t')\,. \qquad (24.24)
\end{aligned}$$

Stąd transformata Laplace'a splotu dwóch funkcji, $f \star g$, jest iloczynem transformat Mellina

$$(f \star g)(t) = \int\limits_0^\infty dt'\, f(t-t')\, g(t') \quad \leftrightarrow \quad F(s)\, G(s) \qquad (24.25)$$

Kładąc $t = 0$ we wzorze (24.24) mamy

$$\int\limits_C \frac{ds}{2\pi i}\, F(s)\, G(s) = \int\limits_0^\infty dt' f(-t')\, g(t') \qquad (24.26)$$

Policzmy jeszcze transformatę Laplace'a iloczynu dwóch funkcji

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, g(t)\, dt &= \int\limits_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-st} f(t) \int\limits_{C'} \frac{ds'}{2\pi i}\, \mathrm{e}^{s't}\, G(s') \\
&= \int\limits_C \frac{ds'}{2\pi i}\, G(s') \int\limits_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{(s-s')t} f(x) \\
&= \int\limits_{C'} \frac{ds'}{2\pi i}\, F(s-s')\, G(s') \qquad (24.27)
\end{aligned}$$

Odwracając wzór (24.27) ze względu na zmienną s otrzymujemy następującą reprezentację Laplace'a iloczynu dwóch funkcji

$$f(t)\, g(t) = \int\limits_C \frac{ds}{2\pi i}\, \mathrm{e}^{st} \int\limits_{C'} \frac{ds'}{2\pi i}\, F(s-s')\, G(s') \qquad (24.28)$$

24.2.2 Pewne transformaty Laplace'a

Przyjmijmy oznaczenie

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) \equiv F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt\,. \tag{24.29}$$

Obliczmy następnie transformatę Laplace'a pochodnej funkcji f:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f'(t)\right](s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} \frac{f(t)}{dt}\, dt = \mathrm{e}^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\, d(\mathrm{e}^{-st}) \\
&= -f(0) + s \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt = s\, F(s) - f(0)
\end{aligned}$$

Stąd wzór dla pochodnej

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](s) = s\,\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) - f(0)\,. \tag{24.30}$$

Łatwo stąd obliczyć transformatę Laplace'a dowolnej wyższej pochodnej. Na przykład, dla drugiej pochodnej otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f''(t)\right](s) &= s\,\mathcal{L}\left[f'(t)\right](s) - f'(0) \\
&= s\Big\{s\,\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) - f(0)\Big\} - f'(0) \\
&= s^2\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) - s f(0) - f'(0)\,.
\end{aligned} \tag{24.31}$$

Licząc pochodną transformaty Laplace'a otrzymujemy

$$\frac{dF(s)}{ds} = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, t f(t)\, dt \tag{24.32}$$

i stąd

$$\mathcal{L}\left[t f(t)\right](s) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)\,. \tag{24.33}$$

W ogólności, różniczkując n-krotnie otrzymujemy

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\,\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)\,. \tag{24.34}$$

Podstawiając pierwszą pochodną do wzoru (24.33) znajdujemy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[tf'(t)\right](s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[f'(t)\right](s) = -\frac{d}{ds}\{sF(s)-f(0)\} \\ &= -\frac{d}{ds}\{sF(s)\} = -sF'(s)-F(s)\,. \end{aligned} \tag{24.35}$$

Zdefiniujmy funkcję

$$g(t) = \int_0^t f(t')\,dt' \tag{24.36}$$

i obliczmy jej transformatę Laplace'a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)](s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} g(t)\,dt \\ &= \frac{-\mathrm{e}^{-st}}{s} g(t)\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} g'(t)\,dt \\ &= \frac{F(s)}{s}\,. \end{aligned} \tag{24.37}$$

Tak więc relacja odwrotna to

$$\int_{C'} \frac{ds'}{2\pi i}\,\mathrm{e}^{st}\,\frac{F(s)}{s} = \int_0^t f(t')\,dt' \tag{24.38}$$

24.3 Transformata Mellina

Rozważmy dwustronną transformatę Laplace'a funkcji $f(t)$ o wartościach zespolonych, określonej na całej osi rzeczywistej,

$$F_2(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt \tag{24.39}$$

Jest ona sumą dwóch jednostronnych transformacji Laplace'a

$$\begin{aligned}F_2(s) &= \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt + \int\limits_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt \\ &= \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt + \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{st} f(-t)\,dt \end{aligned} \tag{24.40}$$

Każda z transformat $F^{\pm}$ ma swój rejon zbieżności. Jeśli $f(t)$ znika w $\pm\infty$ odpowiednio szybko to te dwa obszary mają część wspólną w postaci pionowej wstęgi, w której $F_2(s)$ jest zbieżna, a także analityczna. Jest to tzw. *wstęga podstawowa*. Wybierając wewnątrz tej wstęgi dowolny kontur całkowania C z częścia urojoną rozciągającą się od $-\infty$ do ∞ otrzymujemy relację odwrotną taką jak dla jednostronnej transformaty Laplace'a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \mathrm{e}^{st} F_2(s)\, ds \tag{24.41}$$

Transformatę Mellina otrzymujemy zamieniając zmienne oraz oznaczenia w dwustronnej transformacie Laplace'a

$$\mathrm{e}^{-t} = x\,, \qquad f(t) = g(x)\,, \qquad F_2(s) = G_M(s) \tag{24.42}$$

Wtedy transformata Mellina to

$$G_M(s) = \int_0^\infty x^{s-1} g(x)\, dx \tag{24.43}$$

natomiast relacja odwrotna przyjmuje postać

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C x^{-s} G_M(s)\, ds \tag{24.44}$$

W punktach nieciągłości funkcji $g(x)$ wzór (24.44) daje średnią

$$[g(x+) + g(x-)]/2\,.$$

Zauważmy, że wykonując podstawienie (24.42) w jednostronnej transformacie Laplace'a (24.13) otrzymujemy transformatę Mellina

$$G_M(s) = \int_0^1 x^{s-1} g(x)\, dx \tag{24.45}$$

z obszarem zbieżności na prawo od ostatniej osobliwości funkcji $G_M(s)$. Wzór odwrotny jest zadany przez ten sam wzór (24.44) z konturem całkowania w obszarze zbieżności.

24.3.1 Wzory konwolucyjne

Wyprowadźmy jeszcze wzory konwolucyjne. Niech $F_M(s)$ i $G_M(s)$ będą transformatami Mellina funkcji, odpowiednio, $f(t)$ i $g(t)$. Obliczmy

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{ds}{2\pi i} x^{-s} F_M(s) G_M(s) &= \int_C \frac{ds}{2\pi i} x^{-s} F_M(s) \int_0^\infty \xi^{s-1} g(\xi)\, d\xi \\
&= \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} g(\xi) \int_C \frac{ds}{2\pi i} \left(\frac{x}{\xi}\right)^{-s} F_2(s) \\
&= \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} f\left(\frac{x}{\xi}\right) g(\xi) \qquad (24.46)
\end{aligned}$$

Stąd transformata Mellina splotu dwóch funkcji, $f \star g$, jest iloczynem transformat Mellina

$$(f \star g)(x) = \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} f\left(\frac{x}{\xi}\right) g(\xi) \quad \leftrightarrow \quad F_M(s) G_M(s) \qquad (24.47)$$

Kładąc $x = 1$ we wzorze (24.46) mamy

$$\int_C \frac{ds}{2\pi i} F_M(s) G_M(s) = \int_0^\infty f\left(\frac{1}{\xi}\right) g(\xi) \frac{d\xi}{\xi} \qquad (24.48)$$

Policzmy jeszcze transformatę Mellina iloczynu dwóch funkcji

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{s-1} f(x) g(x)\, dx &= \int_0^\infty dx\, x^{s-1} f(x) \int_{C'} \frac{ds'}{2\pi i} x^{-s'} G_M(s') \\
&= \int_C \frac{ds'}{2\pi i} G_M(s') \int_0^\infty dx\, x^{s-s'-1} f(x) \\
&= \int_{C'} \frac{ds'}{2\pi i} F_M(s-s') G_M(s') \qquad (24.49)
\end{aligned}$$

Stąd dla $s = 1$ otrzymujemy wzór Parsevala dla transformat Mellina

$$\int_0^\infty f(x) g(x)\, dx = \int_{C'} \frac{ds'}{2\pi i} F_M(1-s') G_M(s') \qquad (24.50)$$

Odwracając wzór (24.49) ze względu na zmienną s otrzymujemy następującą reprezentację Mellina iloczynu dwóch funkcji

$$f(x)g(x) = \int\limits_C \frac{ds}{2\pi i} x^{-s} \int\limits_{C'} \frac{ds'}{2\pi i} F_M(s-s')G_M(s') \tag{24.51}$$

24.4 Całki Mellina-Barnesa

Rozważmy całkę Mellina postaci

$$\mathcal{H}(z) = \int\limits_C \frac{ds}{2\pi i} z^{-s} \frac{\Gamma(a_1+s)\ldots\Gamma(a_A+s)\Gamma(b_1-s)\ldots\Gamma(b_B-s)}{\Gamma(c_1+s)\ldots\Gamma(c_C+s)\Gamma(d_1-s)\ldots\Gamma(d_D-s)} \tag{24.52}$$

gdzie $|\arg\, z| < \pi$. Funkcja podcałkowa ma osobliwości w postaci biegunów jednokrotnych w następujących punktach

$$\begin{aligned} a_j+s &= -n, \quad n=0,1,2,\ldots \quad => \quad s=-a_j-n \\ b_j-s &= -n, \quad n=0,1,2,\ldots \quad => \quad s=b_j+n \end{aligned} \tag{24.53}$$

Części rzeczywiste a_j i b_j są uporządkowane w następujący sposób

$$-\mathrm{Re}\, a_A < \ldots < -\mathrm{Re}\, a_1 < \mathrm{Re}\, b_1 < \ldots < \mathrm{Re}\, b_B$$

i pionowy kontur C leży między $-\mathrm{Re}\, a_1$ i $\mathrm{Re}\, b_1$.

Obliczmy całkę (24.52) zamykając kontur całkowania z lewej strony półokręgiem o nieskończonym promieniu. Dla każdego $j \in \{1,2\ldots A\}$ mamy nieskończoną sumę wkładów od biegunów w punktach $s=-a_j-n$. Dłuższy rachunek prowadzi do następującego wyniku, który oznaczymy przez

$$R_L(x) = \sum_{j=1}^{A} z^{a_j}\, \Gamma\left[\begin{array}{cc} (a)'-a_j & (b)+a_j \\ (c)-a_j & (d)+a_j \end{array}\right] {}_{B+C}F_{A+D-1}(j;(-1)^{C-A}z) \tag{24.54}$$

gdzie

$$\Gamma\left[\begin{array}{cc} (a)'-a_j & (b)+a_j \\ (c)-a_j & (d)+a_j \end{array}\right] = \frac{\Gamma(a_1-a_j)'\ldots\Gamma(a_A-a_j)\Gamma(b_1+a_j)\ldots\Gamma(b_B+a_j)}{\Gamma(c_1-a_j)\ldots\Gamma(c_C-a_j)\Gamma(d_1+a_j)\ldots\Gamma(d_D+a_j)}$$

Prime oznacza, że w iloczynie pominięto osobliwy wyraz z $a_j - a_j = 0$. Ponadto funkcja hipergeometryczna ${}_{B+C}F_{A+D-1}(z)$ jest zadana przez

$$
\begin{aligned}
{}_{B+C}F_{A+D-1}(j;z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
&\times \frac{(b_1+a_j)_n \ldots (b_B+a_j)_n (1-c_1+a_j)_n \ldots (1-c_C+a_j)_n}{(1-a_1+a_j)'_n \ldots (1-a_A+a_j)_n (d_1+a_j)_n \ldots (d_D+a_j)_n}
\end{aligned}
$$

gdzie $(\ldots)_n$ to symbol Pochhammera

$$
(a)_n = a(a+1)\ldots(a-n+1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{24.55}
$$

Podstawowy wynik teorii takich całek rozpatrywanych dla liczb zespolonych z obszaru arg |z| $< \pi$ mówi, że jeżeli

$$
\begin{aligned}
B+C &< A+D \quad && \text{to } {}_{B+C}F_{A+D-1} \text{ jest zbieżna dla dowolnych } z \\
B+C &= A+D \quad && \text{to } {}_{B+C}F_{A+D-1} \text{ jest zbieżna dla } |z| < 1 \\
B+C &> A+D \quad && \text{to } {}_{B+C}F_{A+D-1} \text{ jest rozbieżna dla wszystkich } z
\end{aligned}
$$

Podobnie zamykając kontur po prawej stronie otrzymujemy wynik, który tym razem oznaczymy przez

$$
R_R\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{j=1}^{A} z^{-b_j}\, \Gamma\left[\begin{array}{cc} (b)' - b_j & (a)+b_j \\ (d)-b_j & (c)+b_j \end{array}\right] {}_{A+D}F_{B+C-1}\left(j; \frac{(-1)^{D-B}}{z}\right) \tag{24.56}
$$

gdzie funkcja hipergeometryczna ${}_{A+D}F_{B+C-1}$ jest zadana przez

$$
\begin{aligned}
{}_{A+D}F_{B+C-1}\left(j;\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^z} \\
&\times \frac{(a_1+b_j)_n \ldots (a_A+b_j)_n (1-d_1+b_j)_n \ldots (1-d_D+b_j)_n}{(1-b_1+b_j)'_n \ldots (1-b_B+b_j)_n (c_1+b_j)_n \ldots (c_C+b_j)_n}
\end{aligned}
$$

Tym razem podstawowy wynik dla liczb zespolonych z obszaru $|\text{arg } z| < \pi$ brzmi. Jeżeli

$$
\begin{aligned}
A+D &< B+C \quad && \text{to } {}_{A+D}F_{B+C-1} \text{ jest zbieżna dla dowolnych } z \\
A+D &= B+C \quad && \text{to } {}_{A+D}F_{B+C-1} \text{ jest zbieżna dla } |z| > 1 \\
A+D &> B+C \quad && \text{to } {}_{A+D}F_{B+C-1} \text{ jest rozbieżna dla wszystkich } z
\end{aligned}
$$

Stąd następujące

Twierdzenie

$$\mathcal{H}(z) = \begin{cases} R_L(z) & A+D > B+C \qquad |z| < \infty \\ & A+D = B+C \qquad |z| < 1 \\ R_R(1/z) & A+D < B+C \qquad |z| < \infty \\ & A+D = B+C \qquad |z| > 1 \end{cases} \tag{24.57}$$

Dodatkowo, jeśli

$$A+D \geqslant B+C\,, \qquad B \geqslant 1\,, \qquad A+B > C+D \tag{24.58}$$

oraz $|\arg z| < \pi/2(A+B-C-D)$ to dla $z \to \infty$ słuszna jest następująca relacja asymptotyczna

$$R_L(z) \sim R_R(1/z)\,. \tag{24.59}$$

24.5 Transformata Borela

Załóżmy, że mamy do czynienia z szeregiem potęgowym

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,, \tag{24.60}$$

niekoniecznie zbieżnym. Zdefinujmy następnie transformatę Borela tego szeregu

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, t^n\,. \tag{24.61}$$

Załóżmy, że suma po prawej stronie ma skończony promień zbieżności i może być przedłużona analitycznie na całą półoś rzeczywistą dodatnią: $t > 0$. Ponadto zakładamy, że otrzymana w ten sposób funkcja rośnie na tej półosi co najwyżej eksponencjalnie. Istnieje wtedy transformata Laplace'a

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(tz)\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \tag{24.62}$$

Otrzymana w ten sposób funkcja jest nazywana sumą Borela szeregu (24.60). Jeżeli bowiem ten szereg jest zbieżny to zachodzi

$$F(z) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\,(tz)^n\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = \sum_{n=0} \frac{a_n}{n!}\, z^n \int_0^{\infty} t^n\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,. \tag{24.63}$$

Liczenie transformaty Borela jest więc metodą nadawanie sensu szeregowi rozbieżnemu.

Wykład 25

Równania różniczkowe cząstkowe

25.1 Równanie falowe

Jako przykład zastosowania transformaty Fouriera, rozwiążemy jednowymiarowe równanie falowe dla funkcji $u = u(t,x)$,

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \tag{25.1}$$

Równanie falowe jest przykładem równania hiperbolicznego. Aby otrzymać jednoznaczne rozwiązanie, dla tego typu równań specyfikujemy warunki początkowe w czasie dla funkcji i jej pochodnej czasowej.

Znajdziemy rozwiązanie naszego równania dla warunków początkowych

$$u(0,x) = f(x)\,, \qquad u_t(0,x) = 0\,. \tag{25.2}$$

Podstawiając do równania (25.1) wyrażenie z transformatą Fouriera względem zmiennej x

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, U(t,k)\, \mathrm{e}^{ikx}\,, \tag{25.3}$$

otrzymujemy po pomnożeniu obu stron przez $2\pi c^2$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial^2 U(t,k)}{\partial t^2} + c^2k^2U(t,k)\right\}\mathrm{e}^{ikx}\, dk = 0\,. \tag{25.4}$$

Całka znika gdy spełnione jest równanie

$$\frac{\partial^2 U(t,k)}{\partial t^2} + (ck)^2 U(t,k) = 0\,, \tag{25.5}$$

z warunkami początkowymi

$$U(0,k) = F(k)\,, \qquad U_t(0,k) = 0\,, \tag{25.6}$$

gdzie $F(k)$ jest transformatą Fouriera $f(x)$. Dla ustalonego k jest to rówanie klasycznego oscylatora harmonicznego z częstością $\omega = ck$. Stąd rozwiązanie spełniające warunki początkowe

$$U(t,k) = F(k)\cos(ckt)\,. \tag{25.7}$$

Po podstawieniu do (25.3), znajdujemy

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, F(k) \left(\mathrm{e}^{ickt} + \mathrm{e}^{-ickt}\right) \mathrm{e}^{ikx} \qquad (25.8) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, F(k)\, \mathrm{e}^{ik(x+ct)} dk + \frac{1}{2(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, \mathrm{e}^{ik(x-ct)} dk \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc superpozycję dwóch funkcji początkowych poruszających się bez zmiany kształtu w przeciwnych kierunkach z prędkością c.

$$\boxed{u(t,x) = \tfrac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right]} \tag{25.9}$$

25.2 Równanie dyfuzji

Jednowymiarowe równanie dyfuzji ma następującą postać

$$\boxed{\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{D}{2}\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}} \tag{25.10}$$

Wielkość D nazywamy stałą dyfuzji. Równanie to opisuje zmianę gęstości liczby cząstek wykonujących przypadkowe ruchy Browna na prostej. Jest ono przykładem równania parabolicznego, dla którego specyfikujemy warunek początkowy dla funkcji

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{25.11}$$

oraz warunki brzegowe dla dowolnej chwili czasu, np

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0\,. \tag{25.12}$$

Podstawiając do równania dyfuzji transformatę Fouriera

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, U(t,k)\,\mathrm{e}^{ikx}\,, \tag{25.13}$$

znajdujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\partial U(t,k)}{\partial t} + \frac{Dk^2}{2} U(t,k)\right\} \mathrm{e}^{ikx}\, dk = 0\,. \tag{25.14}$$

Całka znika gdy spełnione jest równanie

$$\frac{\partial U(t,k)}{\partial t} + \frac{Dk^2}{2} U(t,k) = 0\,, \tag{25.15}$$

z warunkiem początkowym

$$U(0,k) = U_0(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, u_0(z)\,\mathrm{e}^{-ikz}\,. \tag{25.16}$$

Stąd rozwiązanie równania (25.15)

$$U(t,k) = U_0(k)\,\mathrm{e}^{-(Dt/2)\,k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, u_0(z)\,\mathrm{e}^{-(Dt/2)\,k^2 - ikz}\,.$$

Podstawiając do (25.13), zmieniając kolejność całkowania, znajdujemy

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, u_0(z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-(Dt/2)k^2 + ik(x-z)}\,. \tag{25.17}$$

Zapiszmy wykładnik eksponenty w postaci

$$-\frac{Dt}{2}\,k^2 + ik(x-z) = -\frac{Dt}{2}\left(k - \frac{i(x-z)}{Dt}\right)^2 - \frac{(x-z)^2}{2Dt} \tag{25.18}$$

Wprowadzając nową zmienną

$$y = \sqrt{\frac{Dt}{2}}\left(k - \frac{i(x-z)}{Dt}\right) \tag{25.19}$$

otrzymamy całkując po zmiennej k

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \mathrm{e}^{-(Dt/2)(k-i(x-z)/Dt)^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \mathrm{e}^{-y^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}}\,. \tag{25.20}$$

Stąd ostatecznie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \mathrm{e}^{-(Dt/2)\,k^2+ik(x-z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(x-z)^2}{2Dt}\right\}. \tag{25.21}$$

Tak więc rozwiąznie (25.17) przyjmuje postać

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left\{\frac{-(x-z)^2}{2Dt}\right\} u_0(z)} \tag{25.22}$$

Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie to spełnia warunki brzegowe (25.12), znikając w nieskończonosci.

Przyjmując jako warunek początkowy

$$u_0(x) = \delta(x)\,, \tag{25.23}$$

gdy wszystkie cząstki są skoncentrowane w punkcie $x = 0$, otrzymujemy rozwiązanie

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left\{\frac{-x^2}{2Dt}\right\} \tag{25.24}$$

o wartości średniej $\langle x\rangle = 0$ oraz dyspersji rosnącej liniowo z czasem

$$\sigma^2 = Dt\,. \tag{25.25}$$

Podobnie dla gaussowskiego rozkładu początkowego

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left\{\frac{-x^2}{2\sigma_0^2}\right\}, \tag{25.26}$$

znajdujemy

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_0^2 + Dt)}} \exp\left\{\frac{-x^2}{2(\sigma_0^2 + Dt)}\right\}. \tag{25.27}$$

Tym razem dyspersja to

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + Dt\,. \tag{25.28}$$

Zauważmy, że początkowa wartość średnia $\langle x\rangle = 0$ pozostaje stała w czasie.