Metody matematyczne dla fizyków I
Funkcje analityczne

Krzysztof Golec–Biernat

Instytut Fizyki Jądrowej PAN w Krakowie
Instytut Fizyki Uniwerstytetu Rzeszowskiego

(27 maja 2021)

Wersja robocza nie do dystrybucji

Kraków/Rzeszów
2006-07

Spis treści

Wykład 1

Ciało liczb zespolonych

1.1 Liczby zespolone

Motywacją dla wprowadzenia liczb zespolonych była chęć rozwiązania najprostszego równania algebraicznego

$$x^2+1=0\,, \tag{1.1}$$

dla którego nie istnieje rozwiązanie w dziedzinie liczb rzeczywistych, gdyż formalne rozwiązanie to

$$x=\sqrt{-1}\,. \tag{1.2}$$

Można byłoby zakończyć rozważania na ten temat stwierdzając, że takie równanie nie posiada rozwiązań. Jednak, szukając rozwiązań równania

$$x^3+2x^2-x-2=0 \tag{1.3}$$

znajdujemy trzy pierwiastki rzeczywiste równe ± 1 oraz -2. Z drugiej strony korzystając z wzorów Cardano na pierwiastki wielomianów trzeciego stopnia znajdujemy te same pierwiastki pod warunkiem, że w krokach pośrednich potrafimy wyciągnąć pierwiastek z liczby ujemnej.

W wyniku dogłębnej analizy tego problemu zostało wypracowane pojęcie liczby zespolonej jako **pary liczb rzeczywistych**

$$z=(x,y)\,. \tag{1.4}$$

W zbiorze takich par $\mathbb{C}$ wprowadzimy dwa działania, dodawanie i mnożenie

$$z_1 + z_2 \;=\; (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2\,,\, y_2 + y_2) \tag{1.5}$$

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2\,,\, x_1 y_2 + y_1 x_2)\,. \tag{1.6}$$

Zauważmy, że dla liczb zespolonych z drugim elementem pary równym zero

$$z = (x, 0) \tag{1.7}$$

otrzymujemy reguły dodawania i mnożenia takie jak dla liczb rzeczywistych

$$z_1 + z_2 \;=\; (x_1 + x_2\,,\, 0) \tag{1.8}$$

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; (x_1 x_2\,,\, 0) \tag{1.9}$$

Możemy więc utożsamić zbiór takich par ze zbiorem liczb rzeczywistych

$$\mathbb{R} = \{(x, 0);\, x \in \mathbb{R}\}\,, \tag{1.10}$$

w szczególności zespolona postać zera i jedynki to

$$0 = (0, 0) \qquad\qquad 1 = (1, 0)\,. \tag{1.11}$$

Kluczowym dla konstrukcji rozszerzenia zespolonego liczb rzeczywistych jest **twierdzenie**, że zbiór par $\mathbb{C}$ z działaniami (1.5) i (1.6) tworzy **ciało liczbowe** o własnościach takich samych jak ciało liczb rzeczywistych. Oznacza to, że przy operowaniu liczbami zespolonymi możemy się posługiwać dobrze znanymi regułami działań na liczbach rzeczywistych.

Posługiwanie się wzorem (1.6) dla mnożenia nie jest wygodne, gdyż wymaga zapamiętania nienaturalnej z punktu widzenia działań na liczbach rzeczywistych reguły. W związku z tym wprowadza sią inna notację opartą na następującej tożsamości

$$(x, y) \;=\; (x, 0) + (0, y) \;=\; (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)\,. \tag{1.12}$$

Definiując liczbę zespoloną - **jednostkę urojoną**

$$i \equiv (0, 1) \tag{1.13}$$

i pamiętając o utożsamieniu (1.7), otrzymujemy zapis

$$\boxed{z = x + iy} \tag{1.14}$$

Wprowadza się terminologię, x to **część rzeczywista** liczby zespolonej natomiast y to jej **część urojona**:

$$x = \operatorname{Re} z \qquad\qquad y = \operatorname{Im} z\,. \tag{1.15}$$

Łatwo sprawdzić, że mnożąc dwie liczby zespolone według reguł słusznych dla liczb rzeczywistych otrzymamy wynik (1.6) pod warunkiem, że zastąpimy

$$\boxed{i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1} \tag{1.16}$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2 y_1y_2 + i\,(x_1y_2 + y_1x_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)\,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Własność $i^2 = -1$ powoduje, że $\pm i$ są rozwiązaniami równania (1.1).

Policzmy jeszcze element odwrotny do dowolnej liczby zespolonej $z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(x+iy)}\frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\,. \tag{1.18}$$

Oczywiście

$$z\cdot\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot z = 1\,. \tag{1.19}$$

Przykład

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2i} &= \frac{1}{1+2i}\,\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \\ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+2i}\right) &= \frac{1}{5} \\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1+2i}\right) &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Bardzo ważną cechą odróżniającą liczby zespolone od liczb rzeczywistych jest to, że *liczb zespolonych nie można uporządkować*. Tak więc zapis $z_1 < z_2$ nie ma sensu dla liczb zespolonych z różną od zera częścią urojoną.

1.2 Płaszczyzna zespolona

Liczby zespolone to pary liczb rzeczywistych, które można przedstawić jako punkty dwuwymiarowej **płaszczyzny zespolonej Arganda**. Dodawanie dwóch liczb zespolonych to po prostu dodawanie dwóch wektorów wyznaczających liczby zespolone. Interpretacja mnożenia wymaga jednak dodatkowego wysiłku.

Zauważmy, że $z \neq 0$ możemy scharakteryzować przy pomocy **współrzędnych biegunowych** (r, ϕ):

$$x = r\cos\phi \tag{1.20}$$

$$y = r\sin\phi \tag{1.21}$$

gdzie kąt ϕ nazywa się **argumentem** lub **fazą** liczby zespolonej, natomiast promień wodzący r jest równy jej **modułowi**

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z| \tag{1.22}$$

Wtedy

$$\boxed{z = x+iy = r\,(\cos\phi + i\sin\phi)} \tag{1.23}$$

Tę formę nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej.

Przykład:

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ 1-i &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Mnożąc dwie liczby zespolone otrzymamy

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1\,r_2\,(\cos\phi_1+i\,\sin\phi_1)(\cos\phi_2+i\,\sin\phi_2) \\ &= r_1\,r_2\,\{(\cos\phi_1\cos\phi-\sin\phi_1\sin\phi_2)+i(\sin\phi_1\cos\phi_2+\cos\phi_1\sin\phi_2)\} \\ &= r_1\,r_2\,\{\cos(\phi_1+\phi_2)+i\,\sin(\phi_1+\phi_2)\}\,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Tak więc mnożenie liczb zespolonych polega na dodaniu ich faz oraz pomnożeniu ich modułów.

Dla ilorazu otrzymujemy następujący wzór

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1\,(\cos\phi_1 + i\,\sin\phi_1)}{r_2\,(\cos\phi_2 + i\,\sin\phi_2)}\,\frac{(\cos\phi_2 - i\,\sin\phi_2)}{(\cos\phi_2 - i\,\sin\phi_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\phi_1\cos\phi + \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 - \cos\phi_1\sin\phi_2)}{\cos^2\phi_2 + \sin^2\phi_2} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\,\{\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\,\sin(\phi_1 - \phi_2)\}\,. \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

Przy dzieleniu otrzymujemy różnicę faz i iloraz modułów.

Dla sprzężenia zespolonego otrzymujemy zmianą znaku fazy, gdyż cosinus jest funkcją parzystą natomiast sinus jest funkcją nieparzystą

$$\begin{aligned}
z^* = x - iy &= r\,(\cos\phi - i\,\sin\phi) \\
&= r\,\{\cos(-\phi) + i\,\sin(-\phi)\}. \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

1.3 Sprzężenie zespolone

Dla każdej liczby zespolonej z definiuje się liczbę zespoloną do niej **sprzężoną**

$$z = x + iy \quad \to \quad z^* = x - iy \qquad (1.27)$$

Iloczyn tych liczb to kwadrat ich **modułu**

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2 = |z|^2 \qquad (1.28)$$

Tak więc

$$\boxed{|z| = \sqrt{z \cdot z^*}} \qquad (1.29)$$

Dla liczby rzeczywistej ($y = 0$) otrzymujemy znaną nam definicję modułu. Zauważmy, że można uporządkować moduły liczb zespolonych, gdyż są one liczbami rzeczywistymi.

Regułę odwracania liczby zespolonej (1.18), można teraz zapisać w prosty sposób

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\,\frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{z^*}{|z|^2} \qquad (1.30)$$

Sprzężenie zespolone posiada następujące własności

$$
\begin{aligned}
(z^*)^* &= z && (1.31)\\
(z_1+z_2)^* &= z_1^*+z_2^* && (1.32)\\
(z_1\cdot z_2)^* &= z_1^*\cdot z_2^* && (1.33)\\
\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* &= \frac{z_1^*}{z_2^*}. && (1.34)
\end{aligned}
$$

Z trzeciej i czwartej własności wynika

$$
\begin{aligned}
|z_1\cdot z_2| &= |z_1|\,|z_2|. && (1.35)\\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}. && (1.36)
\end{aligned}
$$

Dla dodawania obowiązuje nierówność trójkąta

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|. \tag{1.37}$$

Przykład

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1+2i}{1-3i}\right)^* &= \frac{(1+2i)^*}{(1-3i)^*} = \frac{(1-2i)}{(1+3i)}\\
\left|\frac{1+2i}{1-3i}\right| &= \frac{|1+2i|}{|1-3i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Korzystając z

$$z = x+iy \qquad\qquad z^* = x-iy \tag{1.38}$$

otrzymujemy

$$x = \mathrm{Re}\, z = \frac{z+z^*}{2} \qquad\qquad y = \mathrm{Im}\, z = \frac{z-z^*}{2i} \tag{1.39}$$

Liczba zespolona jest czysto rzeczywista jeśli $\mathrm{Im}\, z = 0$, tzn

$$z = z^* \tag{1.40}$$

natomiast jest czysto urojona, gdy $\mathrm{Re}\, z = 0$, tzn. $z = iy$. Wtedy

$$z = -z^*. \tag{1.41}$$

1.4 Miejsca geometryczne liczb zespolonych

Przy pomocy równości lub nierówności z liczbami zespolonymi można określić obszary geomeryczne na płaszczyźnie zespolonej.

Podstawową obserwacją jest stwierdzenie, że

$$|z - z_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \tag{1.42}$$

jest odległością euklidesową pomiędzy dwoma punktami płaszczyzny zespolonej $z = (x, y)$ oraz $z_0 = (x_0, y_0)$.

Wtedy równanie

$$|z| = 1 \qquad => \qquad x^2 + y^2 = 1 \tag{1.43}$$

określa okrąg o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu $R = 1$. Podobnie, równanie

$$|z| \leqslant 1 \tag{1.44}$$

to równanie koła. W ogólności, okrąg o środku w punkcie z_0 i promieniu R jest zadany przez

$$|z - z_0| = R \qquad => \qquad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \,. \tag{1.45}$$

Elipsa to miejsce geometryczne punktów płaszczyzny takich, że suma odległości od dwóch ustalonych punktów (ognisk elipsy) jest stała. Wybierając ogniska w punktach a i b płaszczyzny zespolonej określamy elipsę poprzez równanie zespolone

$$|z - a| + |z - b| = R \,. \tag{1.46}$$

Przykład
Znaleźć miejsce geometryczne określone przez **równanie zespolone** $z^2 = 2i$. Zapisując je przy pomocy $z = x + iy$ dostajemy

$$(x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = 2i$$

co prowadzi do układu równań

$$x^2 - y^2 = 0 \,, \qquad\qquad 2xy = 2 \,.$$

Pierwsze równanie prowadzi do warunku $x = \pm y$, natomiast drugie daje $y^2 = \pm 1$. Ponieważ y jest liczbą rzeczywistą, stąd $y = \pm 1$. Miejsce geometryczne to dwa wierzchołki kwadratu $(\pm 1, \pm 1)$.

Wykład 2

Szeregi zespolone

2.1 Szeregi o wyrazach zespolonych

Szeregiem nazywamy formalne wyrażenie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \,. \tag{2.1}$$

Jeżeli $a_n \in \mathbb{C}$ to jest to szereg o wyrazach zespolonych. Powstaje pytanie kiedy taki szereg ma skończoną wartość, czyli kiedy jest **zbieżny**.

Dla każdej skończonej wartości N, N-ta suma częściowa

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \tag{2.2}$$

jest skończona. Szereg (2.1) jest zbieżny jeśli istnieje granica *ciągu sum częściowych*

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S < \infty \,. \tag{2.3}$$

Granicę S nazywamy wtedy **sumą** szeregu. Jeżeli granica taka nie istnieje lub jest równa nieskończoności to szereg jest **rozbieżny**.

Jeżeli suma szeregu modułów wyrazów szeregu (2.1) jest skończona,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \,, \tag{2.4}$$

to szereg (2.1) jest **bezwględnie zbieżny**.

2.2 Kryteria zbieżności szeregów

2.2.1 Kryterium d'Alamberta

Użytecznym kryterium bezwzględnej zbieżności szeregu jest kryterium d'Alamberta. Rozważamy granicę ilorazów modułów kolejnych wyrazów szeregu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho \tag{2.5}$$

W zależności od wartości ρ otrzymujemy

$$\rho = \begin{cases} > 1 & \textit{szereg jest rozbieżny} \\ = 1 & \textit{nie wiadomo} \\ < 1 & \textit{szereg jest bezwzględnie zbieżny} \end{cases} \tag{2.6}$$

Przykład
Policzmy

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n, \qquad \rho_n = \frac{|1+i|^{n+1}}{|1+i|^n} = |1+i| = \sqrt{2} > 1, \qquad \textit{rozbieżny}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3+2i)^n}{n!}, \qquad \rho_n = \frac{|3+2i|}{n+1} \to 0, \qquad \textit{bezwględnie zbieżny}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+i}{n^2}, \qquad \rho_n = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+1/n)^2} \to 1 \qquad \textit{nie wiadomo}$$

Ostatni szereg jest zbieżny na podstawie innego kryterium.

2.2.2 Kryterium Gaussa

Załóżmy, że szereg (2.1) ma tylko wyrazy dodatnie $a_k > 0$ i dla wszystkich $k > N$ stosunek kolejnych wyrazów może być zapisany w postaci

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta(k)}{k^{1+\delta}}, \tag{2.7}$$

gdzie $\delta > 0$, α jest stałą, natomiast $\beta(k)$ jest ograniczone w granicy $k \to \infty$. Wtedy dla

$$\alpha = \begin{cases} > 1 & \textit{szereg jest zbieżny} \\ \leqslant 1 & \textit{szereg jest rozbieżny} \end{cases} \tag{2.8}$$

Przykład
Zbadajmy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{2.9}$$

Kryterium d'Alamberta jest nie roztrzyga tego, dając $\rho = 1$. Zastosujmy kryterium Gaussa. Dla dostatecznie dużych k znajdziemy

$$\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{k^2}{(k+1)^2} = \frac{1}{(1+1/k)^2} = \frac{1}{1+2/k+4/k^2} \\
&= 1 - (\frac{2}{k} + \frac{4}{k^2}) + \left(\frac{2}{k} + \frac{4}{k^2}\right)^2 - \dots \\
&= 1 - \frac{2}{k} + \frac{\beta(k)}{k^2} \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

z funkcją

$$\beta(k) = \text{const} + \frac{1}{k^2} + \dots$$

ograniczoną dla $k \to \infty$. Stąd mamy $\alpha = 2 > 1$ i szereg jest zbiężny.

2.3 Szeregi potęgowe

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy wyrażenie

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n} \tag{2.11}$$

z zespolonymi współczynnikami a_n oraz $z \in \mathbb{C}$.

Kryterium d'Alamberta prowadzi do wniosku, że szereg potęgowy jest bezwzględnie zbieżny gdy

$$\rho_n = \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z - z_0| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \to \quad |z - z_0|\, \rho < 1\,,$$

innymi słowy dla wartości z należących do koła otwartego o środku w punkcie z_0 i promieniu $1/\rho$:

$$|z - z_0| < \frac{1}{\rho} = R, \tag{2.12}$$

gdzie

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,. \tag{2.13}$$

R nazywa się **promieniem zbieżności** szeregu poęgowego.

Przykłady

1. Funkcja e^z zdefiniowana przy pomocy szeregu potęgowego

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ma nieskończony promień zbieżności, gdyż

$$\rho_n = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \;\to\; \rho = \frac{1}{R} = 0\,.$$

Stąd eksponenta, a także zdefiniowane przy jej pomocy funkcje są określone na całej płaszczyźnie zespolonej. Policzmy pochodną eksponenty różniczkując szereg wyraz po wyrazie. Korzystając ze wzoru $(z^n)' = n\,z^{n-1}$, otrzymujemy:

$$(\mathrm{e}^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z\,.$$

2. Dla szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{3^n\,n^2}\,,$$

punkt $z_0 = -1+i$, natomiast promienń to

$$\rho_n = \frac{3^n\,n^2}{3^{n+1}\,(n+1)^2} = \frac{1}{3\,(1+1/n)^2} \;\to\; \rho = \frac{1}{R} = \frac{1}{3}\,.$$

Stąd promień zbieżności $R=3$, a obszar zbieżnościjest kołem otwartym o środku w punkcie $z_0 = -1+i$ i promieniu 3.

2.4 Szereg geometryczny

Określmy obszar zbieżności *szeregu geometrycznego*

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n} \tag{2.14}$$

Punkt $z_0 = 0$, natomiast $\rho = \lim_{n\to\infty} = 1$. Obszar zbieżności to koło $|z| < 1$. Rozważmy sumę częściową

$$S_N = 1 + z + z^2 + \ldots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}\,. \tag{2.15}$$

W obszarze zbieżności $\lim_{N\to\infty} z^{N+1} = 0$ i stąd

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{1 - z}\,. \tag{2.16}$$

Tak więc prawdziwy jest wzór

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}\,, \qquad |z| < 1} \tag{2.17}$$

2.5 Szereg hipergeometryczny

Szereg ten jest zdefiniowany w następujący sposób

$$\boxed{f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta_n)}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}} \tag{2.18}$$

gdzie $(..)_n$ jest symbolem Pochhammera, na przykład

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n - 1)\,. \tag{2.19}$$

Aby uniknąc osobliwości w mianowniku wyrazów szeregu

$$\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots \tag{2.20}$$

Szereg hipergeometryczny jest bezwzględnie zbieżny w kole jednostkowym $|z| < 1$. Licząc bowiem stosunek współczynników szeregu otrzymujemy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\alpha)_n} \frac{(\beta)_{n+1}}{(\beta)_n} \frac{(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+1}} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(\gamma + n)\,(n + 1)}\,,$$

tak więc

$$\rho = 1/R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(\alpha/n + 1)(\beta/n + 1)|}{|(\gamma/n + 1)(1 + 1/n)|} = 1\,. \tag{2.21}$$

Wykład 3

Funkcje zespolone

3.1 Funkcje zmiennej zespolonej

Jeśli znamy regułę przypisującą liczbie zespolonej z liczbę zespoloną w to mówimy, że w jest funkcją z, co zapisujemy

$$w = f(z)\,. \tag{3.1}$$

Jeśli według tej regułu jednej liczbie z odpowiada jedna liczba w to mamy funkcję **jednowartościową**. Jeżeli jednej wartości z odpowiada wiele wartości w to otrzymujemy funkcję **wielowartościową**.

Ponieważ $w = u + iv$ jest liczbą zespoloną, która zależy od liczby zespolonej $z = x + iy$ to

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)\,. \tag{3.2}$$

Mówimy, że funkcja u to **część rzeczywistą** funkcji f, natomiast v to jej **część urojona**.

Przykład:
Dla $w = f(z) = z^2$ mamy

$$w = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

Stąd

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad\qquad v(x,y) = 2xy\,.$$

Jeżeli ograniczamy się tylko do pewnego podzbioru D płaszczyzny zespolonej, z której działa funkcja ($z \in D$), to D nazywamy **dziedziną** funkcji f. Wtedy $R = f(D)$ to **obraz dziedziny** poprzez funkcję f.

Przykład:
Funkcja $f(z) = z^2$ z dziedziną D jak poniżej odwzorowuje pierwszą ćwiartkę płaszczyzny z w górną półpłaszczyznę zmiennej w:

$$D = \{(x,y);\, x \geqslant 0, y \geqslant 0\} \quad \rightarrow \quad R = \{(u,v);\, -\infty < u < \infty, v \geqslant 0\}\,.$$

Zwykle staramy się określić funkcję na całej płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem punktów, w których wartość funkcji jest nieskończona lub nieokreślona. Na przykład

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \tag{3.3}$$

jest nieskończona w punkcie $z = -1$.

3.2 Funkcja eksponencjalna

Funkcja eksponencjalna zmiennej **zmiennej zespolonej** jest zdefiniowana poprzez nieskończony szereg:

$$\boxed{\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} \tag{3.4}$$

Podstawiając $z = 1$ widzimy, że e to podstawa logarytmów naturalnych – liczba rzeczywista zdefiniowana w analizie funkcji rzeczywistych poprzez

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\,. \tag{3.5}$$

Funkcja eksponencjalna jest określona **na całej** płaszczyżnie zespolonej. Udowodnimy to przy pomocy kryterium d'Alamberta zbieżności szeregów. Obliczmy granicę stosunku modułów kolejnych wyrazów szeregu (3.4)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \, \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0\,.$$

Stąd promień zbieżności $R=\infty$ i szereg jest bezwzględnie zbieżny na całej płaszczyźnie zespolonej.

Dla eksponenty słuszny jest wzór

$$\boxed{\mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}} \tag{3.6}$$

Udowodnimy to mnożąc dwa szeregi

$$\begin{aligned}
&\left(1+z_1+\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1^3}{3!}+\dots\right)\left(1+z_2+\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}+\dots\right)= \\
= \;&\left(1+(z_1+z_2)+\left(\frac{z_1^2}{2!}+z_1z_2+\frac{z_2^2}{2!}\right)+\left(\frac{z_1^3}{3!}+\frac{z_1^2}{2!}z_2+z_1\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}\right)+\dots\right) \\
= \;&\left(1+(z_1+z_2)+\frac{(z_1+z_2)^2}{2!}+\frac{(z_1+z_2)^3}{3!}+\dots\right).
\end{aligned}$$

Ze wzoru (3.6) znajdujemy dla $n\in\mathbb{N}$

$$\boxed{(\mathrm{e}^z)^n = \underbrace{\mathrm{e}^z\cdot\ldots\cdot\mathrm{e}^z}_{n-razy} = \mathrm{e}^{nz}} \tag{3.7}$$

Z równości $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{-z}=\mathrm{e}^0=1$ najdujemy

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}} \tag{3.8}$$

3.3 Postać biegunowa liczby zespolonej

Policzmy funkcję eksponencjalną dla czysto urojonego argumentu $z=iy$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!} = \left(1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}+\frac{(iy)^5}{5!}+\dots\right) \\
&= \underbrace{\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\dots\right)}_{\cos y}+i\underbrace{\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\dots\right)}_{\sin y}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Otrzymaliśmy rozwinięcia cosinusa i sinusa zmiennej rzeczywistej y. Udowodniliśmy w ten sposób **wzór Eulera**:

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y} \tag{3.10}$$

Zauważmy, że dla dowolnego rzeczywistego y

$$|e^{iy}| = \cos^2 y + \sin^2 y = 1\,. \tag{3.11}$$

Ponadto otrzymujemy wspaniała relacja wiążąca cztery podstawowe stałe w matematyce

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \tag{3.12}$$

Wzór Eulera pozwala zapisać liczbę zespoloną w **postaci biegunowej**

$$\boxed{z = r\,(\cos\phi + i\,\sin\phi) = r\,e^{i\phi}} \tag{3.13}$$

Postać to pozwala w naturalny sposób mnożyć i dzielić liczby zespolone

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; (r_1 e^{i\phi_1})(r_2 e^{i\phi_2}) = r_1\, r_2\, e^{i(\phi_1+\phi_2)} \tag{3.14}$$

$$\frac{z_1}{z_2} \;=\; \frac{r_1\, e^{i\phi_1}}{r_2\, e^{i\phi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\phi_1-\phi_2)} \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{z} \;=\; \frac{1}{r\, e^{i\phi}} = \frac{1}{r}\, e^{-i\phi}\,. \tag{3.16}$$

Przykład
Przy pomocy formy biegunowej łatwo policzymy

$$\begin{aligned}
1+i &= \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} \\
1-i &= \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4} \\
-1-i &= (-1)\cdot(1+i) = e^{i\pi}\,\sqrt{2}\,e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\,e^{5\pi i/4} \\
-1+i &= (-1)\cdot(1-i) = e^{i\pi}\,\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}\,e^{3\pi i/4}
\end{aligned}$$

Ponadto otrzymujemy wzory trygonometryczne dla sumy i różnicy kątów

$$\begin{aligned}
e^{i(\alpha\pm\beta)} &= \cos(\alpha\pm\beta) + i\sin(\alpha\pm\beta) = e^{i\alpha}\,e^{\pm i\beta} \\
&= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta \pm i\sin\beta) \\
&= (\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta)
\end{aligned}$$

co prowadzi do znanych już wzorów

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Wzór (3.10) pozwala policzyć wartość funkcji eksponencjalnej dla dowolnego argumentu zespolonego

$$\boxed{\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y)} \tag{3.18}$$

Zauważmy że eksponenta nie zmienia przy transformacji:

$$y \to y + 2\pi k \tag{3.19}$$

Jest więc **funkcją okresową** o okresie $2\pi i$. Otrzymujemu w ten sposób relację dla całkowitych k

$$\boxed{\mathrm{e}^{z+2\pi k i} = \mathrm{e}^z} \tag{3.20}$$

Przykład
Obliczmy

$$\mathrm{e}^{4+3\pi i} = \mathrm{e}^4\,\mathrm{e}^{3\pi i} = \mathrm{e}^4\,\{\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)\} = -\mathrm{e}^4\,.$$

3.4 Potęga całkowita liczby zespolonej

Liczbę zespoloną można podnieść do potęgi całkowitej n, korzystając ze wzoru

$$\boxed{z^n = (r\mathrm{e}^{i\phi})^n = r^n\,\mathrm{e}^{in\phi}} \tag{3.21}$$

Dla $z = \mathrm{e}^{i\phi}$ otrzymujemy wzór de Moivre'a

$$\boxed{(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)} \tag{3.22}$$

Możemy przy jego pomocy wyprowadzić wzory trygonometryczne na wielokrotność kąta.

Przykład

- Policzmy

$$(1+i)^{100} = (\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4})^{100} = (\sqrt{2})^{100}\,(\mathrm{e}^{i\pi/4})^{100} = 2^{50}\,\mathrm{e}^{25\pi i} = -2^{50}\,.$$

- Dla $n=2$ otrzymujemy ze wzoru de Moivre'a

$$\begin{aligned}(\cos\phi + i\sin\phi)^2 &= (\cos^2\phi - \sin^2\phi) + i\,(2\sin\phi\cos\phi)\\ &= \cos(2\phi) + i\sin(2\phi)\end{aligned}$$

  i stąd

$$\cos(2\phi) = \cos^2\!\phi - \sin^2\!\phi, \qquad \sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi\,. \tag{3.23}$$

3.5 Pierwiastki liczby zespolonej

Zdefiniujemy n-ty pierwiastek liczby zespolonej korzystając ze wzoru

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \left(r\,\mathrm{e}^{i\phi}\right)^{1/n} = \left(r\,\mathrm{e}^{i(\phi+2\pi k)}\right)^{1/n} \tag{3.24}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Stąd ostateczny wzór

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\exp\left\{\frac{i\,(\phi+2\pi k)}{n}\right\}} \tag{3.25}$$

Otrzymujemy n **różnych pierwiastków** dla $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

Przykład
Obliczmy trzeci pierwiastek z jedynki

$$\sqrt[3]{1} = \mathrm{e}^{2\pi k\,i/3}, \qquad k = 0, 1, 2 \tag{3.26}$$

i stąd trzy pierwiastki

$$\begin{aligned} z_1 &= 1\\ z_2 &= \mathrm{e}^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\\ z_3 &= \mathrm{e}^{4\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\,. \end{aligned} \tag{3.27}$$

3.6 Funkcje trygonometryczne

Z równań

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y\,, \qquad e^{-iy} = \cos y - i \sin y \tag{3.28}$$

wyliczymy cosinus i sinus zmiennej rzeczywistej y

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\,, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\,. \tag{3.29}$$

Zastępując y zmienną **zespoloną** z, otrzymujemy jako definicje

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} \tag{3.30}$$

Funkcje te są określone na **całej** płaszczyźnie zespolonej.

Łatwo udowodnić, że wciąż słuszna jest tożsamość

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,. \tag{3.31}$$

Ponadto, cosinus jest funkcją parzystą, natomiast sinus nieparzystą

$$\begin{aligned} \cos(-z) &= \cos z\,, \\ \sin(-z) &= -\sin(z)\,. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Funkcje trygonometryczne **nie są ograniczone** na płaszczyźnie zespolonej, gdyż dla $y \to \pm\,\infty$ znajdujemy

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \to \infty\,.$$

Funkcje tangens i cotangens zdefiniowane są w oczywisty sposób

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}\,, \qquad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}\,. \tag{3.33}$$

Przykład
Policzmy

$$\cos(5i) = \tfrac{1}{2}\,(e^{-5} + e^{5})\,.$$

3.7 Funkcje hiperboliczne

Definiuje się funkcje hiperboliczne określone na całej płaszczyźnie zespolonej

$$\boxed{\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad\qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}}\,. \tag{3.34}$$

Zachodzi dla nich

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\,. \tag{3.35}$$

Podobnie jak dla funkcji trygonometrycznych, cosh jest funkcją parzystą, natomiast sinh jest funkcją nieparzystą:

$$\cosh(-z) = \cosh z \tag{3.36}$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z\,. \tag{3.37}$$

W analogii do funkcji trygonometrycznych defniujemy również tangens i cotangens hiperboliczny

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}\,, \qquad\qquad \operatorname{ctgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}\,. \tag{3.38}$$

Przykład
Policzmy

$$\begin{aligned} \cosh(i\pi) &= \frac{e^{i\pi} + e^{-i\pi}}{2} = \cos\pi = 1 \\ \sinh(i\pi) &= \frac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{2} = i\sin\pi = 0\,. \end{aligned}$$

Przykład ten ilustruje prosty związek pomiędzy funkcjami hiperbolicznymi i trygonometrycznymi

$$\begin{aligned} \cosh(iz) &= \cos z \\ \sinh(iz) &= i\sin z\,. \end{aligned} \tag{3.39}$$

3.8 Logarytm zmiennej zespolonej

Logarytm zmiennej zespolonej $z \neq 0$ definiuje się jako funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej,

$$w = \ln z, \qquad <=> \qquad e^{w} = z \tag{3.40}$$

Stąd wynika

$$\boxed{e^{\ln z} = z} \tag{3.41}$$

Ze względu na okresowość funkcji wykładniczej

$$e^{w} = e^{w + 2\pi k i} \tag{3.42}$$

logarytm jest funkcją **wieloznaczną** dla $k \in \mathbb{Z}$. Tej samej wartości z odpowiada więc **nieskończenie wiele** wartości logarytmu

$$\boxed{\ln z = w + 2\pi k i}. \tag{3.43}$$

Dla postaci biegunowej $z = |z| e^{i\phi}$ otrzymujemy

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\,(\phi + 2\pi k)} \tag{3.44}$$

gdyż

$$e^{\ln z} = e^{\ln|z| + i(\phi + 2\pi k)} = e^{\ln|z|}\, e^{i(\phi + 2\pi k)} = |z|\, e^{i\phi} = z\,.$$

Wartości logarytmu dla ustalonego n nazywamy **gałęzią logarytmu**.

Przykład

$$\begin{aligned}
\ln 1 &= \ln|1| + i(0 + 2\pi n) = 2\pi n i \\
\ln(-1) &= \ln|-1| + i(\pi + 2\pi n) = i\pi + 2\pi n i \\
\ln(i) &= \ln e^{i\pi/2} = \ln|e^{i\pi/2}| + i\,(\pi/2 + 2\pi n) = i\,(\pi/2 + 2\pi n i) \\
\ln(1+i) &= \ln\left(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\right) = \ln\sqrt{2} + i\,(\pi/4 + 2\pi n i)\,.
\end{aligned}$$

Logarytm jest określony na całej płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem dowolnej półprostej o początku w punkcie $z = 0$ zwanej **cięciem**. Zwykle wybiera się ją wzdłuż ujemnej półosi rzeczywistej. Wtedy gałąź główna logarytmu jest zdefiniowana dla kąta

$$-\pi < \phi \leqslant \pi \,. \tag{3.45}$$

Wartość logarytmu wykazuje skok przy przejściu przez cięcie. Tak więc dla liczb rzeczywistych mniejszych od zera mamy tuż powyżej cięcia

$$\ln z = \ln |z| + i\pi \,, \tag{3.46}$$

a wykonując pełny obrót zgodnie z ruchem wskazówek zegara, otrzymujemy tuż poniżej cięcia

$$\ln z = \ln |z| - i\pi \,.$$

Nie można więc określić jednoznacznie wartości funkcji wzdłuż cięcia. Możemy natomiast rozważyć sytuację, w której po wykonaniu pełnego obrotu przechodzimy na inny **płat Riemanna** płaszczyzny zespolonej. Logarytm jest wtedy funkcją jednoznaczną, określoną na nieskończonej rodzinie takich płatów.

Początek cięcia w punkcie $z = 0$ nazywamy **punktem rozgałęzienia**. Przy jego obiegu wartość funkcji nie wraca do wartości wyjściowej wykazując nieciągłość (skok).

1. Z definicji logarytmu i własności eksponenty otrzymujemy

   $$\mathrm{e}^{\ln(z_1 \cdot z_2)} = z_1 \cdot z_2 = \mathrm{e}^{\ln z_1}\, \mathrm{e}^{\ln z_2} = \mathrm{e}^{\ln z_1 + \ln z_2} \,.$$

   Tak wec logarytm iloczynu to suma logarytmów z dokładnością do czynnika $2\pi k\, i$

   $$\boxed{\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_1 + 2\pi k\, i} \tag{3.47}$$

2. Podobnie, ze względu na

   $$\mathrm{e}^{\ln(z_1/z_2)} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\mathrm{e}^{\ln z_1}}{\mathrm{e}^{\ln z_2}} = \mathrm{e}^{\ln z_1 - \ln z_2} \,,$$

   otrzymujemy

   $$\boxed{\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_1 + 2\pi k\, i} \tag{3.48}$$

3. Policzmy jeszcze dla całkowitego n

$$\mathrm{e}^{\ln(z^n)} = z^n = \left(\mathrm{e}^{\ln z}\right)^n = \mathrm{e}^{n \ln z}$$

i stąd

$$\boxed{\ln(z^n) = n \ln z + 2\pi k\, i} \tag{3.49}$$

3.9 Potęga zespolona

Operację podnoszenia do zespolonej potęgi w przy zespolonej podstawie $z \neq 0$ definiujemy w następujący sposób

$$\boxed{z^w = \mathrm{e}^{w \ln z}} \tag{3.50}$$

W wyniku otrzymujemy funkcję **wielowartościową** ze względu na występujący w definicji logarytm. W związku z tym **nie są ogólnie słuszne** relacje znane z przypadku rzeczywistego

$$\begin{aligned} z^w z^u &\neq z^{w+u} \\ (z_1 z_2)^w &\neq z_1^w z_2^w \\ (z^w)^u &\neq z^{wu}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Przykład

1. Policzmy
$$1^i = \mathrm{e}^{i \ln 1} = \mathrm{e}^{i\{(0+2\pi n i)\}} = \mathrm{e}^{-2\pi n}. \tag{3.52}$$
Otrzymaliśmy nieskończenie wiele wartości dla $n \in \mathbb{Z}$. Dla
$$i^{1/2} = \mathrm{e}^{(\ln i)/2} = \mathrm{e}^{i(\pi/2+2\pi n)/2} = \mathrm{e}^{i\pi/4}\, \mathrm{e}^{i\pi n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i) \tag{3.53}$$
mamy tylko dwie wartości.

2. Korzystając z wyniku (3.52) znajdujemy
$$(1^i)^i = \left(\mathrm{e}^{-2\pi n}\right)^i = \mathrm{e}^{i \ln \mathrm{e}^{-2\pi n}} = \mathrm{e}^{i\{-2\pi n + 2\pi k i\}} = \mathrm{e}^{-2\pi n i - 2\pi k}, \tag{3.54}$$
gdzie $k, n \in \mathbb{Z}$. Podczas, gdy
$$1^{i \cdot i} = 1^{-1} = \mathrm{e}^{-\ln 1} = \mathrm{e}^{-2\pi n i} \neq (1^i)^i. \tag{3.55}$$

Wykład 4

Funkcje analityczne

4.1 Pochodna funkcji zespolonej

Załóżmy, że funkcja zespolona f jest jednoznaczna i określona w pewnym obszarze D płaszczyzny zespolonej: $D \subset \mathbb{C}$.

Pochodna funkcji f w punkcie $z \in D$ jest zdefiniowana jako granica ilorazu różnicowego

$$\boxed{f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}} \tag{4.1}$$

Ważne jest, że granica musi istnieć i być niezależna od sposobu zmierzania przyrostu Δz do zera.

Warunek istnienia pochodnej funkcji zespolonej jest dużo silniejszy niż dla funkcji rzeczywistych. Na płaszczyźnie zespolonej istnieje nieskończenie wiele kierunków, dla których musi istnieć ta sama granica ilorazu różnicowego, natomiast na osi rzeczywistej są tylko dwa kierunki.

Przykład
Dla funkcji $f(z) = z$ mamy

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z) - (z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 1 = 1\,. \tag{4.2}$$

Granica ta w oczywisty sposób nie zależy od kierunku Δz.

Inaczej jest dla funkcji $f(z) = z^*$, gdyż

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^* - (z)^*}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\Delta z)^*}{\Delta z} \tag{4.3}$$

i wtedy dla $\Delta z = |\Delta z| \mathrm{e}^{i\phi}$ znajdujemy

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \mathrm{e}^{-2i\phi} = \mathrm{e}^{-2i\phi}. \tag{4.4}$$

W zależności od kierunku (kąta ϕ) otrzymujemy dowolną liczbę zespoloną o module równym 1. Pochodna dla tej funkcji więc nie istnieje.

Wprowadza się następującą terminologię.

Definicja 1

Funkcja f jest różniczkowalna albo **analityczna** *w punkcie $z_0 \in D$ jeśli istnieje pochodna zarówno w tym punkcie jak i we wszystkich punktach pewnego otoczenia z_0.*

Otoczeniem K_{z_0} punktu z_0 jest dowolne koło o środku w tym punkcie

$$K_{z_0} = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\} \tag{4.5}$$

Definicja 2

Funkcja f jest **analityczna** *lub* **holomorficzna** *w obszarze $D \subset \mathbb{C}$ jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie tego obszaru.*
Funkcja analityczna dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ nazywa się funkcją **całkowitą**

Tak więc funkcja $f(z) = z$ jest funkcją analityczną (całkowitą), natomiast $f(z) = z^*$ nie jest funkcją analityczną.

Funkcja *różniczkowalna w punkcie jest również ciągła w tym punkcie.* Ciągłość w punkcie z oznacza, że

$$\lim_{\Delta z \to 0} f(z + \Delta z) = f(z). \tag{4.6}$$

Zapisując

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \Delta z \tag{4.7}$$

widzimy, że prawa strona dąży do zera dla $\Delta z \to 0$ jeśli istnieje granica ilorazu różnicowego (pochodna).

4.2 Równania Cauchego-Riemanna

Zbadajmy jakie są konsekwencje analityczności. Rozważmy granicę ilorazu różnicowego funkcji analitycznej

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)\,. \tag{4.8}$$

z przyrostem $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)\} + i\,\{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)\}}{\Delta x + i\,\Delta y}\,.$$

Pochodna istnieje niezależnie od kierunku, tak więc dla $\Delta z = \Delta x$ znajdujemy

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)\} + i\{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)\}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Podobnie, dla $\Delta z = i\,\Delta y$ otrzymujmy

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)\} + i\,\{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)\}}{i\,\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y\to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \\ &= -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Porównując prawe strony równań (4.9) i (4.10) znajdujemy **równania Cauchego-Riemanna** dla części rzeczywistej i urojonej funkcji analitycznej

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \tag{4.11}$$

Wprowadźmy przy tej okazji oznaczenia

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}\,, \qquad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tag{4.12}$$

i podobnie dla części urojonej. W tych oznaczeniach (4.11) to

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Powstaje pytanie czy spełnienie równań Cauchego-Riemanna jest warunkiem wystarczającym do tego by funkcja f była analityczna. Odpowiedzią jest:

Twierdzenie

Jednowartościowa funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze $D \subset \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy gdy cztery pochodne u_x, u_y, v_x, v_y istnieją, są ciągłe i spełniają równania Cauchego-Riemanna w każdym punkcie obszaru D.

Przykład

1. Funkcja

$$f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y) = (x^2 - y^2) + i\,(2xy)$$

jest analityczna na całej płaszczyźnie zespolonej, gdyż spełnione są równania Cauchego-Riemanna

$$\begin{aligned} u_x &= 2x = v_y \\ u_y &= -2y = -v_x\,, \end{aligned} \tag{4.14}$$

a cztery pochodne wszędzie istnieją i są ciągłe.

2. Funkcja $f(x,y) = x^2 + y^2$ nie jest analityczna, gdyż nie są spełnione równania Cauchego-Riemanna dla dowolnego $z \neq 0$

$$\begin{aligned} u_x &= 2x \neq v_y = 0 \\ u_y &= 2y \neq -v_x = 0\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

W punkcie $z = 0$ równania Cauchego-Riemanna są spełnione i cztery pochodne są ciągłe, lecz f nie jest w nim analityczna, gdyż nie istnieje otoczenie tego punktu, w którym f jest różniczkowalna – porównaj Definicję 1.

4.3 Formalne reguły różniczkowania

Istnieje wygodny sposób określania czy funkcja jest analityczna. Z równości $z = x + iy$ oraz $z^* = x - iy$, mamy

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*) \qquad y = -\frac{i}{2}(z - z^*) . \tag{4.16}$$

Podstawiając te związki otrzymujemy formalnie

$$f(x, y) = f(z, z^*) . \tag{4.17}$$

Rozważmy następnie pochodną

$$\partial_{z^*} f = \frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) f . \tag{4.18}$$

Podstawiając po prawej stronie $f = u + iv$ znajdziemy na mocy równań Cauchego-Riemanna

$$\partial_{z^*} f = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = \frac{1}{2}\{(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)\} = 0 . \tag{4.19}$$

Stąd stwierdzenie, że *funkcja analityczna nie zależy od* z^*, jedynie od z.

Tłumaczy ono dlaczego poniższe funkcje z przykładów nie są analityczne

$$f(z) = z^* , \qquad\qquad f(z) = x^2 + y^2 = z\, z^* .$$

Wychodząc z definicji (4.1) możemy wyprowadzić znane z teorii funkcji rzeczywistych reguły różniczkowania

$$\begin{aligned}
(c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))' &= c_1 f_1'(z) + c_2 f_2'(z) \\
(f(z)\, g(z))' &= f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z) \\
\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' &= \frac{f'(z)\, g(z) - f(z)\, g'(z)}{[g(z)]^2} , \qquad g(z) \neq 0 \\
(f(g(z))' &= f'(g(z))\, g'(z) .
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Obowiązują też znane dla funkcji rzeczywistych wzory dla pochodnych

$$\begin{aligned}
(z^n)' &= n\, z^{n-1} \qquad\qquad n \in \mathbb{N} \\
(e^z)' &= e^z \\
(\sin z)' &= \cos z \\
(\cos z)' &= -\sin z \\
(\sinh z)' &= \cosh z \\
(\cosh z)' &= \sinh z
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Słuszny jest też znany z teorii funkcji rzeczywistych wzór na pochodną funkcji odwrotnej. Jeśli w pewnym obszarze funkcja ciągła i jednokrotna $w = f(z)$ ma funkcję odwrotną $z = F(w)$ oraz $f'(z) \neq 0$ to

$$F'(w) = \frac{1}{f'(z)}\,. \tag{4.22}$$

Stąd dla $z = \ln w$ otrzymujemy w obszarze analityczności logarytmu

$$(\ln w)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^z)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^z} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln w}} = \frac{1}{w} \tag{4.23}$$

Szereg potęgowy (2.11) **jest funkcją analityczną** w obszarze zbieżności. Ze względu na to, że szereg potęgowy jest bezwzględnie zbieżny można go różniczkować wyraz po wyrazie. Tak więc jeśli funkcja analityczna $f(z)$ jest zadana poprzez szereg potęgowy to w obszarze zbieżności szeregu

$$\boxed{f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n z^{n-1}} \tag{4.24}$$

4.4 Intrepretacja geometryczna

Konsekwencją równań Cauchego-Riemanna jest równanie

$$u_x v_x + u_y v_y = 0\,, \tag{4.25}$$

lub w zapisie przy pomocy gradientów

$$\boxed{\nabla u \cdot \nabla v = 0} \tag{4.26}$$

gdzie operator gradientu to

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{4.27}$$

Rozpatrzmy następnie linie $z(t) = (x(t), y(t))$ stałych wartości u:

$$u(x(t), y(t)) = u_0\,, \tag{4.28}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$ jest rzeczywistym parametrem. Różniczkując po t, otrzymamy

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \nabla u \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = 0\,. \tag{4.29}$$

Tak więc, gradient ∇u jest prostopadły do linii stałego u (wektora stycznego do tej linii). Podobnie gradient ∇v jest prostopadły do linii stałego v.

Warunek (4.26) oznacza więc, że dla funkcji analitycznej $f = u + iv$ linie stałego u i v w płaszczyźnie $z = (x, y)$ przecinają się pod kątem prostym.

Powyższa obserwacja odzwieciedla fakt, że funkcje analityczne są **przekształceniami konforemnymi** - zachowującymi kąty. W omawianym przypadku przecinające się pod kątem prostym linie stałego u i v w płaszczyźnie $z = (x, y)$ są odwzorowane analitycznie, $w = f(z)$, w ortogonalne do siebie linie $u = u_0$ i $v = v_0$ w płaszczyźnie $w = (u, v)$.

4.5 Funkcje harmoniczne

Różniczkując równania Cauchego-Riemanna (3.12) znajdujemy

$$u_{xx} = v_{xy} = v_{yx} = -u_{yy} \tag{4.30}$$

i podobnie

$$v_{xx} = -u_{xy} = -u_{yx} = -v_{yy}\,. \tag{4.31}$$

Stąd wynika, że części rzeczywista i urojona funkcji analitycznej spełniają dwuwymiarowe równanie Laplace'a

$$\boxed{\nabla^2 u = 0 \qquad\qquad \nabla^2 v = 0} \tag{4.32}$$

gdzie laplasjan

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,. \tag{4.33}$$

Tą własność funkcji analitycznych wykorzystuje się przy rozwiązywaniu dwuwymiarowych problemów na płaszczyźnie opisywanych równaniem Laplace'a z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

Wykład 5

Całkowanie zespolone

5.1 Całka funkcji zespolonych

Rozważmy krzywą gładką (tzn. różniczkowalną) na płaszczyźnie zespolonej

$$C: \qquad t \in [0,1] \quad \rightarrow \quad z(t) = x(t) + iy(t)\,. \tag{5.1}$$

- Krzywa C jest **krzywą zamkniętą** jeśli

$$z(0) = z(1)\,. \tag{5.2}$$

- Krzywa C jest **krzywą Jordana** jeśli nie przecina się, tzn. odwzorowanie (5.1) jest różnowartościowe dla punktów wewnętrznych krzywej

$$t_1 \neq t_2 \quad => \quad z(t_1) \neq z(t_1)\,. \tag{5.3}$$

Zdefiniujemy całkę funkcji zespolonej $f(z)$ wzdłuż krzywej Jordana C:

$$\boxed{I = \int\limits_C f(z)\,dz} \tag{5.4}$$

Podzielmy krzywą na N części zadanych przez punkty

$$z(0) = z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots, z_{N-1},\ z_N = z(1)\,. \tag{5.5}$$

Zdefiniujmy następnie sumę

$$I_N = \sum_{i=1}^{N} f(w_i)\,(z_i - z_{i-1})\,, \tag{5.6}$$

gdzie punkt pośredni $w_i \in (z_{i-1}, z_i)$. Jeżeli granica

$$\lim_{N\to\infty} I_N = I \tag{5.7}$$

istnieje i nie zależy od podziału (5.5), a także od wyboru punktów pośrednich to wzór (5.7) definiuje całkę funkcji zespolonej o następujących własnościach:

I. W ogólności całka *zależy od krzywej* C.

II. Całka jest *działaniem liniowym*, tzn. dla dowolnych całkowalnych funkcji f i g oraz liczb $a, b \in \mathbb{C}$, zachodzi

$$\int_C \{a f(z) + b\, g(z)\}\, dz = a \int_C f(z)\, dz + b \int_C g(z)\, dz \tag{5.8}$$

III. Jeśli $C = C_1 \cup C_2$ jest sumą dwóch krzywych takich, że koniec pierwszej jest początkiem drugiej, $z_1(1) = z_2(0)$, to

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz \tag{5.9}$$

IV. Zmieniając kierunek całkowania, $C \to -C:\ \tilde{z}(t) = z(1-t)$, dostajemy

$$\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz \tag{5.10}$$

V. Jeśli $f(z)$ jest ciągła na krzywej gładkiej (5.1) to

$$\int_C f(z)\, dz = \int_0^1 f(z(t))\, z'(t)\, dt \tag{5.11}$$

VI. Słuszna jest następująca nierówność

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqslant \int_C |f(z)|\, |dz| \tag{5.12}$$

Przyjmijmy konwencję, że krzywa *zamknięta* jest zorientowana **dodatnio** jeśli podczas jej obiegu zmykany przez nią obszar jest po lewej stronie. Jeśli tylko nie zaznaczymy, że jest inaczej, całki liczone są po krzywych zorientowanych dodatnio.

Przykład

1. Policzmy całkę po okręgu $|z - z_0| = r$. Parametryzując okrąg:

$$z(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{2\pi i t}, \qquad z'(t) = 2\pi r\,\mathrm{e}^{2\pi i t}, \tag{5.13}$$

   otrzymujmemy na podstawie (5.11)

$$\boxed{\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i\,.} \tag{5.14}$$

   Wynik nie zależy od promienia okręgu!

2. Policzmy całkę z funkcji $f(z) = z$ po drodze C zadanej przez punkty $A = (0,0)\,, B = (1,0), C = (1,i)$:

$$\begin{aligned}\int_C z\,dz &= \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 (1 + iy)\,(i dy) \\ &= \int_0^1 x\,dx + i\int_0^1 dy - \int_0^1 y\,dy = i\,.\end{aligned} \tag{5.15}$$

5.2 Związek z całkami rzeczywistymi

Istnieje związek między całką zespoloną a rzeczywistą całką krzywoliniową. na płaszczyźnie (x,y). Pamiętając, że

$$dz = dx + idy \tag{5.16}$$

dostajemy dla $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u + iv)\,(dx + idy) \\ &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)\,.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Możemy więc obliczyć całkę zespoloną licząc dwie całki rzeczywiste. Wykorzystując parametryzację (5.1) krzywej C mamy

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \int_0^1 \left\{u\,\frac{dx}{dt} - v\,\frac{dy}{dt}\right\} dt + i\int_0^1 \left\{v\,\frac{dx}{dt} + u\,\frac{dy}{dt}\right\} dt} \tag{5.18}$$

gdzie $u = u(x(t), y(t))$ oraz $v = v(x(t), y(t))$.

Przykład

1. Obliczmy całkę (5.14) po okręgu jednostkowym $|z| = 1$, sparametryzowanym przy pomocy

$$x = \cos(2\pi t)\,, \qquad\qquad y = \sin(2\pi t)$$

gdzie $t \in [0, 2\pi)$. Wykorzystując wzór dla wartości funkcji na okręgu:

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \cos(2\pi t) - i\sin(2\pi t)\,,$$

znajdujemy na podstawie (5.18) znany wynik (5.14) dla $z_0 = 0$

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{z} &= 2\pi\int_0^1 \{-\cos(2\pi t)\sin(2\pi t) + \sin(2\pi t)\cos(2\pi t)\}\,dt \\ &+ 2\pi i\int_0^1 \{\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)\}\,dt = 2\pi i\int_0^1 dt = 2\pi i\,.\end{aligned}$$

Jak zobaczymy, niezerowa wartość całki jest związana z tym, że $z = 0$ jest biegunem prostym funkcji $1/z$.

2. Podobnie, policzmy całkę po tym samym konturze z funkcji $f(z) = z$:

$$\begin{aligned}\oint_C z\,dz &= \oint_C (xdx - ydy) + i\oint_C (ydx + xdy) \\ &= -4\pi\int_0^1 \sin(4\pi t)\,dt + 2\pi i\int_0^1 \cos(4\pi t)\,dt = 0\,.\end{aligned}$$

Obliczona całka jest równa zeru na mocy twierdzenia Cauchego.

Wykład 6

Twierdzenie Cauchego

Dla funkcji analitycznych zachodzi podstawowe twierdzenie zespolonego rachunku całkowego.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna w obszarze jednospójnym $D \subset \mathbb{C}$, to dla każdej krzywej zamkniętej C zawartej w D zachodzi

$$\boxed{\oint_C f(z)\, dz = 0} \tag{6.1}$$

Dowód podamy w mniej ogólnym przypadku, w którym zakłada się ciągłość funkcji $f(z)$ oraz istnienie i ciągłość pochodnej $f'(z)$. Goursat pokazał, że twierdzenie Cauchego można udowodnić bez ostatniego założenia.

Skorzystamy z **twierdzenia Greena** na płaszczyźnie. Jeżeli funkcje $P(x,y)$ oraz $Q(x,y)$ są ciągłe wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi w pewnym obszarze płaszczyzny R i na jego brzegu C to

$$\oint_C (P\, dx + Q\, dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy\,. \tag{6.2}$$

Tak więc wychodząc ze wzoru (5.17) dla krzywej zamkniętej, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\oint\limits_C f(z)\,dz &= \oint\limits_C (u\,dx - v\,dy) + i\oint\limits_C (v\,dx + u\,dy)\\ &= \iint\limits_R (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i\iint\limits_R (u_x - v_y)\,dx\,dy = 0\end{aligned}$$

na mocy równań Cauchego-Riemanna.

Przykład
Obliczmy całkę po okręgu jednostkowym $|z| = 1$

$$I = \oint\limits_C \frac{dz}{z^2 + z - 6}\,. \tag{6.3}$$

Mianownik pod całką można zapisać jako $(z-2)(z+3)$, stąd $f(z)$ ma bieguny proste w $z = 2, -3$. Funkcja podcałkowa jest więc analityczna wewnątrz i na okręgu, co oznacza, że $I = 0$.

Pokażemy, że całką po okręgu $|z| = 1$

$$\boxed{I = \oint\limits_C \frac{dz}{z^2} = 0} \tag{6.4}$$

Podstawiając $z = \mathrm{e}^{i\phi}$ oraz $dz = i\mathrm{e}^{i\phi}d\phi$, otrzymujemy

$$I = i\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-i\phi}\,d\phi = i\int\limits_0^{2\pi} \cos\phi\,d\phi + \int\limits_0^{2\pi} \sin\phi\,d\phi = 0\,. \tag{6.5}$$

Pomimo, że funkcja podcałkowa ma osobliwość w $z = 0$ w kole jednostkowym to całka wynosi zero. Analityczność jest więc warunkiem *dostatecznym*, ale nie *koniecznym* do znikania całki po konturze zamkniętym.

6.1 Konsekwencje twierdzenia Cauchego

Z twierdzenia Cauchego wypływają bardzo silne wnioski.

1. Jeżeli $f(z)$ jest analityczna w obszarze $D \subset \mathbb{C}$ to całka

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz \tag{6.6}$$

jest **niezależna od drogi całkowania** zawartej w D. Rozważając dwie drogi C_1 i C_2 otrzymujemy krzywą zamkniętą $C = C_1 \cup (-C_2)$. Calka po tej drodze jest równa zero, a więc

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{-C_2} = \int_{C_1} - \int_{C_2} = 0 \tag{6.7}$$

i stąd

$$\boxed{\int_{C_1} = \int_{C_2}} \tag{6.8}$$

2. Jeżeli $f(z)$ ma punkty osobliwe wewnątrz zamkniętego konturu całkowania to wynik całki (na ogół różny od zera) **nie zmieni się jeśli zdeformujemy kontur** tak by w trakcie deformacji nie przeciął żadnego punktu osobliwych.

   Z konturu C_1 i konturu zdeformowanego C_2 można zbudować krzywą zamkniętą nie zawierającą punktów osobliwych

$$C = C_2 \cup L_1 \cup (-C_1) \cup (-L_1)\,. \tag{6.9}$$

   Całka po tak zdefiniowanej krzywej znika, a więc

$$\oint_C = \int_{C_2} + \int_{L_1} - \int_{C_1} - \int_{L_1} = \oint_{C_2} - \oint_{C_1} = 0\,. \tag{6.10}$$

   i stąd

$$\boxed{\oint_{C_1} = \oint_{C_2}} \tag{6.11}$$

3. Załóżmy, że $C_1, C_2, \ldots, C_n$ są konturami zamkniętymi, z których każdy leży na zewnątrz pozostałych, a wszystkie leżą wewnątrz zamkniętego konturu C_0 zawartego w obszarze analityczności funkcji $f(z)$. Wtedy

$$\boxed{\oint_{C_0} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \ldots + \oint_{C_n}} \tag{6.12}$$

   Dowód przebiega podobnie jak w punkcie 2.

6.2 Funkcja pierwotna

Funkcja $F(z)$ określona poprzez całkę z funkcji analitycznej f

$$\boxed{F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(w)\, dw} \tag{6.13}$$

jest **funkcją pierwotną** funkcji f, tzn.

$$\boxed{F'(z) = f(z)} \tag{6.14}$$

Obie funkcje mają ten sam obszar analityczności D. Z twierdzenia Cauchego wynika, że krzywa całkowania zawarta w w obszarze analityczności jest dowolna. Ponadto zmiana ustalonego punktu z_0 nie wpływa na własność (6.14), gdyż powoduje tylko dodanie do funkcji $F(z)$ stałej

$$c = \int_{z_0'}^{z_0} f(w)\, dw\,. \tag{6.15}$$

W obszarze analityczności f słuszne jest **podstawowe twierdzenie rachunku całkowego**

$$\boxed{\int\limits_{a}^{b} f(z)\, dz = \int\limits_{a}^{z_0} f(z)\, dz + \int\limits_{z_0}^{b} f(z)\, dz = F(b) - F(a)} \tag{6.16}$$

Przykład
Obliczmy

$$\int_a^b z^2\, dz = \left. \frac{z^3}{3} \right|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}\,.$$

Dla krzywej zamkniętej, gdy $a = b$, całka jest równa zeru.

Wykład 7

Szereg Taylora

7.1 Wzór całkowy Cauchego

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest analityczna wewnątrz i na brzegu obszaru D ograniczonego krzywą Jordana C, zorientowaną dodatnio, to dla dowolnego punktu $z_0 \in D$ zachodzi:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw} \tag{7.1}$$

Twierdzenie to pokazuje jak silnym warunkiem jest analityczność funkcji zespolonej. Jeśli zadamy funkcję analityczną na *brzegu* obszaru analityczności to wartość funkcji w dowolnym punkcie *wewnątrz* tego obszaru jest już jednoznacznie określona poprzez **wzór całkowy Cauchego** (7.1).

Dowód wzoru Cauchego rozpoczniemy zauważając na podstawie własności 2. z paragrafu 5.4, że po wybraniu dowolnego punktu z_0 możemy zdeformować C do okręgu C_0 o środku w tym punkcie. Przy wykorzystaniu wzoru (5.13), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \oint\limits_{C_0} \frac{f(w)}{w - z_0}\, dw &= \underbrace{\oint\limits_{C_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}\, dz}_{I} + f(z_0) \underbrace{\oint\limits_{C_0} \frac{dw}{w - z_0}}_{2\pi i} \\ &= I + 2\pi i\, f(z_0) \end{aligned} \tag{7.2}$$

Pokażemy, że $|I|$ jest dowolnie małą liczbą. W tym celu wybierzmy dowolne $\epsilon > 0$. Z ciągłości funkcji f w punkcie z_0 wynika, że

$$\exists\, \delta > 0\,;\ |w - z_0| < \delta \ => \ |f(w) - f(z_0)| < \epsilon\,. \tag{7.3}$$

Tak więc wybierając okrąg C_δ o promień $r = \delta$, otrzymujemy

$$|I| \leqslant \oint\limits_{C_\delta} \frac{|f(w) - f(z_0)|}{|w - z_0|}\, |dw| < \epsilon \oint\limits_{C_\delta} \frac{|dw|}{|w - z_0|} = 2\pi\epsilon\,. \tag{7.4}$$

Wybrane ϵ możemy uczynić dowolnie małe, stąd $I = 0$ i wzór całkowy Cauchego wynika z relacji (7.2).

Przykład
Obliczmy całkę po dowolnym konturze otaczającym punkt $z = 2$

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z - 2}\, dz = 2\pi i\, \mathrm{e}^2 \tag{7.5}$$

7.2 Wyższe pochodne

Analityczność, czyli istnienie pierwszej pochodnej funkcji zespolonej, gwarantuje istnienie *pochodnych dowolonego rzędu*. Tej własności nie mają funkcje rzeczywiste.

Twierdzenie
Jeżeli funkcja f jest analityczna w obszarze D to posiada pochodną dowolnego rzędu w każdym punkcie $z_0 \in D$, zadaną wzorem

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw} \tag{7.6}$$

gdzie $C \subset D$ jest dowolną krzywą zamkniętą otaczającą punkt z_0.

Policzmy granicę ilorazu różnicowego korzystając ze wzoru Cauchego

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i\, \Delta z} \oint\limits_C f(w) \left\{ \frac{1}{w - z_0 - \Delta z} - \frac{1}{w - z_0} \right\} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(w)}{(w - z_0 - \Delta z)(w - z_0)}\, dw \end{aligned} \tag{7.7}$$

Tak więc, w granicy $\Delta z \to 0$ otrzymujmemy dla pierwszej pochodnej

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\, dw\,. \tag{7.8}$$

Licząc wyższe pochodne można udowodnić przez indukcję wzór (7.6). Zauważmy, że wzór ten można także formalnie otrzymać ze wzoru całkowego Cauchego (7.1) poprzez kolejne różniczkowanie obu stron po z_0.

Przykład
Obliczmy całkę po dowolnym konturze otaczającym punkt $z = 2$

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z-2)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2}\, (\mathrm{e}^z)''\big|_{z=2} = i\pi \mathrm{e}^2 \tag{7.9}$$

7.3 Szereg Taylora

Funkcja analityczna ma wszystkie pochodne i w konsekwencji może być rozwinięta w szereg Taylora wokół dowolnego punktu z_0 należącego do obszaru analityczności funkcji:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\, (z-z_0)^n} \tag{7.10}$$

Tej cechy nie mają funkcje rzeczywiste. Istnienie wszystkich pochodnych nie gwarantuje rozwijalności w szereg Taylora. Przykładem jest poniższa funkcja rzeczywista

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{dla} \;\; x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \;\; x = 0 \end{cases} \tag{7.11}$$

W punkcie $x = 0$ funkcja $f(x)$ ma wszystkie pochodne równe zeru, a więc jej szereg Taylora wokół tego punktu jest równy zeru. Tak więc dla każdego $x \neq 0$ zachodzi

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \equiv 0\,. \tag{7.12}$$

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest analityczna w obszarze D to jest rozwijalna w otoczeniu każdego punktu $z_0 \in D$ w szereg potęgowy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n \,, \tag{7.13}$$

zbieżny w kole o środku w punkcie z_0 i promieniu nie mniejszym niż odległość punktu z_0 od brzegu obszaru D. Współczynniki a_n są zadane wzorem

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, dw \,, \tag{7.14}$$

gdzie $C \subset D$ jest dowolną krzywą zamkniętą otaczającą punkt z_0. Ze wzorów Cauchego (7.6) otrzymujemy

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \,. \tag{7.15}$$

Punktem wyjścia dowodu twierdzenia jest wzór całkowy Cauchego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(w)}{w - z} \, dw \,, \tag{7.16}$$

w którym całkujemy po brzegu K obszaru analityczności D. Wybierzmy dowolne $z_0 \in D$ wokół którego szukamy rozwinięcie Taylora. Wtedy

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \,,$$

gdzie

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1 \,,$$

gdyż z jest punktem maksymalnego koła zawartego w D, a punkt w należy do brzegu tego obszaru. Stąd wyrażenie z szeregiem geometrycznym

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \tag{7.17}$$

Podstawiając do (7.16) i całkując wyraz po wyrazie ze względu na jednostajną zbieżność szeregu geometrycznego, znajdujemy

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_K \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right\} f(w)\, dw \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \right\}}_{a_n} (z-z_0)^n\,. \qquad (7.18)
\end{aligned}
$$

Wyrażenie w nawiasie jest poszukiwanym współczynnikiem a_n. Dzięki analityczności funkcji f, możemy zdeformować kontur całkowania K do dowolnej krzywej zamkniętej zawartej w D i otaczającej punkt z_0.

7.4 Przykłady rozwinięć w szereg Taylora

1. Rozwinięcie w szereg Taylora funkcji

$$
f(z) = \frac{1}{1-z} \qquad (7.19)
$$

wokół $z = 0$ jest zadane wzorem (4.27) dla szeregu potęgowego:

$$
\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,, \qquad |z| < 1} \qquad (7.20)
$$

Koło zbieżności ma środek w punkcie $z = 0$ i promień $R = 1$, tzn. sięga do osobliwości funkcji w $z = 1$.

2. Podobnie rozwińmy tą samą funkcję wokół $z = -1$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\left(\frac{z+1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\,(z+1)^n\,. \qquad (7.21)
\end{aligned}
$$

Obszar zbieżności tego szeregu $|z+1| < 2$ to koło o środku w punkcie $z = -1$ i promieniu $R = 2$. Sięga ono do osobliwości funkcji w $z = 1$.

3. Najbardziej znane rozwinięcia w szereg Taylora to

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots \tag{7.22}$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \tag{7.23}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \tag{7.24}$$

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \tag{7.25}$$

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \tag{7.26}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \tag{7.27}$$

W ostatnim przypadku $|z| < 1$, poza nim $z \in \mathbb{C}$ jest dowolne.

7.5 Konsekwencje rozwinięcia Taylora

Załużmy, że f jest analityczna i *ograniczona* w kole K: $|z - z_0| \leqslant r$,

$$|f(z)| < M \,. \tag{7.28}$$

Dla współczynników a_n szeregu Taylora zachodzi

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^{n+1}} |dw| \,.$$

Podstawiając $w = z_0 + r\mathrm{e}^{i\phi}$ i wykorzystując warunek ograniczoności funkcji znajdujemy **nierówność Cauchego**

$$\boxed{|a_n| < \frac{M}{r^n}} \tag{7.29}$$

Z nierówności tej wynikają ważne twierdzenia.

Twierdzenie Liouville'a

Każda funkcja analityczna na całej płaszczyźnie i ograniczona jest stała.

Dla takiej funkcji promień koła analitycznści r może być dowolnie duży i stąd z (7.29) wynika, że $a_n = 0$ z wyjątkiem a_0. Tak więc

$$f(z) = a_0\,. \tag{7.30}$$

Dlatego funkcje całkowite (analityczne na całej płaszczyźnie), takie jak:

$$\mathrm{e}^z,\ \sin z,\ \cos z,\ \sinh z,\ \cosh z\,,$$

nie są ograniczone.

Podstawowe twierdzenie algebry

Każdy różny od stałej wielomian stopnia n, $w(z) = a_0 + a_1 z + \dots a_n z^n$, ma dokładnie n pierwiastków w dziedzinie liczb zespolonych.

Jeżeli wielomian $w(z)$ nie ma zer, to iloraz $1/w(z)$ jest funkcją całkowitą i ograniczoną, gdyż $1/|w(z)| \to 0$ dla $|z| \to \infty$. Stąd jest funkcją stałą, co jest sprzeczne z założeniem. Wielomian $w(z)$ ma zatem przynajmniej jeden pierwiastek z_1.

Dzieląc $w(z)$ przez $(z - z_1)$ otrzymujemy wielomian stopnia $(n-1)$, dla którego powtarzamy nasze rozumowanie. W ten sposób udowodniliśmy, że $w(z)$ ma dokładnie n pierwiastków $z_1, z_2, \dots, z_n$ na płaszczyźnie zespolonej i może być przedstawiony w postaci

$$w(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)\,, \tag{7.31}$$

Wykład 8

Szereg Laurenta

8.1 Punkty osobliwe

Z punktu widzenia dowolnej, ale ustalonej funkcji zespolonej $f(z)$ dowolny punkt płaszczyzny zespolnej z_0 może być:

1. Punktem **regularnym**, gdy $f(z)$ jest analityczna w tym punkcie.

2. **Izolowanym punktem osobliwym**, gdy $f(z)$ nie jest analityczna w tym punkcie. Jednocześnie istnieje otoczenie otoczenie z_0, w którym funkcja jest analityczn.
   Przykładem jest punkt $z_0 = 1$ dla funkcji
   $$f(z) = \frac{1}{1-z}\,. \tag{8.1}$$

3. **Nieizolowanym punktem osobliwym**, gdy $f(z)$ nie jest analityczna w tym punkcie. Jednocześnie w każdym otoczeniu z_0 istnieje punkt różny od niego, w ktorym funkcja nie jest analityczna.
   Przykładem jest punkt $z_0 = 0$ dla funkcji
   $$f(z) = \log z\,. \tag{8.2}$$
   Jest on początkiem cięcia, po obrocie wokół tego punktu o kąt pełny $f(z)$ nie wraca do wyjściowej wartości. Tak więc w każdym otoczeniu

punktu nieizolowanego istnieje punkt, w którym funkcja nie jest analityczna.
Innym przykładem jest punkt $z_0 = 0$ dla funkcji

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}\,. \tag{8.3}$$

Punkty osobliwe tej funkcji to

$$\sin(1/z) = 0 \quad => \quad \frac{1}{z} = n\pi \quad => \quad z_n = \frac{1}{n\pi}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

W każdym otoczeniu $z_0 = 0$ można znaleźć punkt osobliwy $z_n \neq 0$.

4. Punktem **pozornie osobliwym**, gdy $f(z)$ nie jest w nich określona, ale można ją dookreślić poprzez znalezienie granicy.
Przykładem jest punkt $z_0 = 0$ dla funkcji $f(z) = \sin z/z$. Dookreślamy ją w tym punkcie licząc granicę

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \equiv f(0)\,. \tag{8.4}$$

8.2 Rozwinięcie w szereg Laurenta

Twierdzenie

Jeśli funkcja f jest analityczna w otoczeniu pierścieniowym punktu z_0

$$r \leqslant |z - z_0| \leqslant R \tag{8.5}$$

to jest rozwijalna w szereg Laurenta w tym obszarze

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}} \tag{8.6}$$

Współczynniki rozwinięcia są zadane wzorami

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \tag{8.7}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-n+1}}\, dw\,, \tag{8.8}$$

w których C jest dowolnym konturem zawartym w otoczeniu pierścieniowym z_0, zorientowanym dodatnio.

W dowodzie twierdzenia, rozważmy kontur zamknięty w otoczeniu pierścieniowym

$$C = C_R \cup L_1 \cup (-C_r) \cup (-L_1)\,. \tag{8.9}$$

Wybierzmy następnie dowolne z w obszarze pierścieniowym z_0 i napiszmy wzór całkowy Cauchego

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_R} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \end{aligned} \tag{8.10}$$

Dla całki po konturze C_R rozwiniemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} \\ &= \frac{1}{(w-z_0)}\,\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} \\ &= \frac{1}{(w-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \end{aligned} \tag{8.11}$$

otrzymując szereg geometryczny, zbieżny dla

$$\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1\,. \tag{8.12}$$

Podstawiając (8.11) do całki i całkując wyraz po wyrazie, znajdujemy

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_R}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_R}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right\}}_{a_n}(z-z_0)^n\,. \tag{8.13}$$

Wyrażenie w nawiasie to *współczynnik* a_n, (8.7). Zauważmy, że ze względu na brak analityczności funkcji f w całym kole K_R

$$a_n \neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,, \tag{8.14}$$

tak jak w przypadku rozwinięcia Taylora.

Dla całki po konturze C_r rozwijamy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w-z} &= \frac{-1}{z-w} = \frac{-1}{(z-z_0)-(w-z_0)} \\
&= \frac{-1}{(z-z_0)} \frac{-1}{1-\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} \\
&= \frac{-1}{(z-z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n . \qquad (8.15)
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc szereg geometryczny zbieżny dla

$$\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1 . \qquad (8.16)$$

Podstawiając do całki, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} f(w)\, (w-z_0)^n\, dw \right\} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}\, dw \right\}}_{b_n} \frac{1}{(z-z_0)^n} . \qquad (8.17)
\end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie to poszukiwany *współczynnik* b_n, (8.8). Ostatecznie, równanie (8.13) przyjmuje postać rozwinięcia Laurenta

$$\boxed{f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (z-z_0)^n}_{\textit{część regularna}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}}_{\textit{część główna}}} \qquad (8.18)$$

Otoczenie pierścieniowe z_0 to wspólny obszar zbieżności sumy tych dwóch szeregów, a także obszar analityczności funkcji podcałkowych dla a_n i b_n. Możemy więc zdeformować kontury C_R i C_r do wspólnego konturu C zawartego w otoczeniu pierścieniowym. Ta uwaga kończy dowód twierdzenia.

Zauważmy, że jeśli funkcja f jest analitycznej w kole $|z-z_0| \leqslant R$, łącznie z punktem z_0, to funkcja podcałkowa we współczynniku b_n jest analityczna w tym obszarze i stąd

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(w)(w-z_0)^{n-1}\,dw = 0\,. \tag{8.19}$$

Analityczność $f(z)$ pozwala nam również utożsamić

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,. \tag{8.20}$$

Otrzymujemy w ten sposób szereg Taylora. Szereg Laurenta jest więc uogólnieniem szeregu Taylora na przypadek, gdy $f(z)$ ma punkty osobliwe.

8.3 Przykłady rozwinięć

1. Rozwińmy w szereg potęgowy wokół $z=0$ funkcję

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{(1-z)} \tag{8.21}$$

Wykorzystując wzór (4.27), otrzymamy w kole $|z|<1$:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots \tag{8.22}$$

Punkt $z=0$ jest izolowanym punktem osobliwym funkcji $f(z)$ i stąd ujemna potęga z w szeregu.

2. Funkcja

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} \tag{8.23}$$

ma dwa punkty osobliwe w $z=-1,-2$. Znajdziemy jej rozwinięcie w szereg Laurenta w otoczeniu pierścieniowym $1<|z|<2$. Rozkładając

$$f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}\,. \tag{8.24}$$

otrzymujemy dla pierwszego ułamka gdy $|z|>1$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}\,. \tag{8.25}$$

Dla drugiego ułamka znajdujemy w obszarze $|z| < 2$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n . \tag{8.26}$$

Stąd w obszarze wspólnym $1 < |z| < 2$ dostajemy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n . \tag{8.27}$$

Istnienie części głównej z potęgami $1/z$ nie oznacza, że $f(z)$ jest osobliwa w $z = 0$, gdyż punkt ten leży poza obszarem zbieżności szeregu.

Wykład 9

Całkowanie metodą residuów

9.1 Całkowanie a residua

Załóżmy, że z_0 *izolowanym punktem osobliwym funkcji* f. Otoczenie pierścieniowe z_0 redukuje się wtedy do otoczenia nakłutego

$$0 < |z - z_0| \leqslant R, \tag{9.1}$$

w którym f jest analityczna. Możemy więc rozwinąć funkcję $f(z)$ w szereg Laurenta (8.6) w całym otoczeniu z_0 z wyjątkiem tego punktu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{9.2}$$

Pierwszy współczynnik przy ujemnej potędze $(z - z_0)$ nazywamy **residuum** funkcji f w punkcie z_0

$$\boxed{b_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(w)\, dw} \tag{9.3}$$

Całka z funkcji f po konturze C otaczającym punkt osobliwy z_0 jest więc zadana przez wartość residuum funkcji f w tym punkcie. Obserwacja ta stanowi podstawę *metody residuów* obliczania całek, którą podsumowuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest analityczna w obszarze D i na jego brzegu C, z wyjątkiem skończonej liczby izolowanych punktów osobliwych $z_k \in D$, w których ma residua $b_1(z_k)$ to słuszny jest następujący wzór

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} b_1(z_k)} \tag{9.4}$$

W dowodzie wykorzystamy własność 3. z rozdziału 5.4:

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{C_N} f(z)\,dz\,, \tag{9.5}$$

gdzie C_i są konturami otaczającymi punkty osoobliwe z_i. Zgodnie z (9.4) każda całka po prawej stronie jest równa $2\pi i \times$*residuum* funkcji w odpowiednim punkcie osobliwym i stąd teza twierdzenia.

Wzór (9.4) jest uogólnieniem wzoru całkowego Cauchego (6.1). Jeśli bowiem f jest analityczna w punkcie z_0 to możemy ją rozwinąć w szereg Taylora w pewnym otoczeniu tego punktu i stąd

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right\} = \frac{f(z_0)}{(z-z_0)} + \textit{część regularna}$$

Residuum rozwijanej funkcji wynosi $f(z_0)$ i korzystając ze wzoru (9.4) otrzymujemy wzór całkowy Cauchego

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i\, f(z_0)\,. \tag{9.6}$$

Nie oznacza to, że w ten sposób "wyprowadziliśmy" wzór Cauchego, gdyż jest on podstawą twierdzenia o residuach. Pokazaliśmy tylko konsystencję wzoru (9.4).

Przykład

Obliczmy całkę

$$\oint_C \frac{dz}{z(1-z)} \tag{9.7}$$

po okręgu $|z| = 2$. Wewnątrz konturu całkowania znajdują sie teraz dwa punkty osobliwe w $z = 0, 1$. Korzystając z rozwinięcia Laurenta (8.22) widzimy, że residuum w $z = 0$ wynosi 1,

$$b_1(0) = 1\,. \tag{9.8}$$

Residuum w $z = 1$ obliczymy rozwijając funkcję w szereg Laurenta w otoczeniu nakłutym jedynki $0 < |z-1| < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{1+(z-1)} + \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(z-1)^n + \frac{-1}{z-1}$$

Stąd residuum $b_1(1) = -1$ i ostateczny wynik to

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z(1-z)} = 2\pi i\,(1-1) = 0\,. \tag{9.9}$$

9.2 Obliczanie residuum

Znajdowanie residuum poprzez rozwijanie w szereg Laurenta nie zawsze jest wygodne. W zależności od rodzaju izolowanego punktu osobliwego możemy wyprowadzić inne sposoby obliczania residuów.

1. Izolowany punkt osobliwy z_0 nazywamy **biegunem prostym** jeśli istnieje granica

   $$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)\,f(z) \neq 0\,. \tag{9.10}$$

   Oznacza to, że część główna w rozwinięciu Laurenta zawiera tylko jeden wyraz

   $$f(z) = \frac{b_1}{(z-z_0)} + \textit{część regularna} \tag{9.11}$$

   Wtedy residuum

   $$\boxed{b_1(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\,f(z)} \tag{9.12}$$

   Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ilorazem dwóch funkcji

   $$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} \tag{9.13}$$

to dla bieguna prostego $g(z_0)=0$ i $h(z_0)\neq 0$. Licząc residuum, otrzymujemy

$$b_1(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{h(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{h(z)}{(g(z)-g(z_0))/(z-z_0)}\,.$$

Stąd ostateczny wzór dla residuum, gdy z_0 jest biegunem prostym

$$\boxed{b_1(z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}} \tag{9.14}$$

2. Izolowany punkt osobliwy z_0 jest **biegunem N-krotnym**, gdy

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z) \neq 0\,. \tag{9.15}$$

Wtedy cześć główna szeregu Laurenta ma skończoną liczbę wyrazów równą N,

$$f(z) = \frac{b_N}{(z-z_0)^N} + \ldots + \frac{b_1}{(z-z_0)} \ + \ \textit{część regularna}\ , \tag{9.16}$$

Aby obliczyć residuum b_1 pomnożmy $f(z)$ przez $(z-z_0)^N$,

$$(z-z_0)^N f(z) = b_N + \ldots + b_1(z-z_0)^{N-1} \ + \ \textit{część regularna}\ ,$$

a następnie zróżniczkujmy $(N-1)$ razy.

$$\Big\{(z-z_0)^N f(z)\Big\}^{(N-1)} = b_1\,(N-1)(N-2)\ldots 1 \ + \ \textit{część regularna}.$$

Stąd ostateczny wzór dla przypadku, gdy z_0 jest biegunem N-krotnym

$$\boxed{b_1(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\Big\{(z-z_0)^N f(z)\Big\}} \tag{9.17}$$

3. Punkt z_0 jest **punktem istotnie osobliwym** jeśli nie istnieje naturalne N takie, że istnieje granica (9.15). W rozwinięciu Laurenta wokół tego punktu część główna ma nieskończenie wiele wyrazów:

$$f(z) = \ldots + \frac{b_N}{(z-z_0)^N} + \ldots + \frac{b_1}{(z-z_0)} \ + \ \textit{część regularna} \tag{9.18}$$

Nie ma wtedy prostej metody na znalezienie residuum poza rozwinięciem w szereg Laurenta.
Na przykład

$$
\mathrm{e}^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \ldots \tag{9.19}
$$

i stąd residuum w punkcie istotnie osobliwym $z = 0$ wynosi $b_1(0) = 1$.
Podobnie dla

$$
\mathrm{e}^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^{2n}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!\, z^4} + \ldots \tag{9.20}
$$

i stąd residuum $b_1(0) = 0$

Nieskończona część główna nie jest związana jedynie z izolowanym punktem osobliwym. Na przykład, funkcja

$$
f(z) = \sqrt{z(1-z)} \tag{9.21}
$$

ma cięcie na odcinku $[-1, 1]$, które także prowadzi do szereg Laurenta z nieskończona część główną postaci

$$
\sqrt{z(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{1}{z^{2n+1}} \,. \tag{9.22}
$$

9.3 Przykłady

1. Korzystając z rozwinięć (9.19) i (9.20), znajdujemy dla dowolnego konturu C otaczającego punkt $z = 0$

$$
\oint_C \mathrm{e}^{1/z} dz = 2\pi i \qquad\qquad \oint_C \mathrm{e}^{1/z^2} dz = 0 \,.
$$

2. Policzmy residua w punktach osobliwych funkcji:

$$
f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-1)^2} \,.
$$

Ma ona biegun prosty w $z = -i$ oraz biegun dwukrotny w $z = 1$. Residuum dla bieguna prostego to

$$
b_1(-i) = \lim_{z \to (-i)} \frac{(z+i)}{(z+i)(z-1)^2} = \frac{1}{(1+i)^2} = -\frac{i}{2} \,.
$$

Dla bieguna dwukrotnego otrzymujemy

$$b_1(1) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{(z-1)^2}{(z+i)(z-1)^2}\right)' = \lim_{z\to 1}\frac{-1}{(z+i)^2} = \frac{-1}{(1+i)^2} = \frac{i}{2}\,.$$

Całka po konturze zamkniętym otaczającym punkty osobliwe to

$$\oint\limits_C \frac{1}{(z+i)(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\left(-\frac{i}{2}+\frac{i}{2}\right) = 0\,.$$

Wykład 10

Obliczanie całek

10.1 Całki trygonometryczne

Są to całki rzeczywiste postaci

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\phi, \sin\phi)\, d\phi\,. \tag{10.1}$$

Ich obliczenie możemy sprowadzić do policzenia całki zespolonej po okręgu jednostkowym: $z = \exp\{i\phi\}$, poprzez podstawienie

$$\cos\phi \;=\; \frac{\mathrm{e}^{i\phi} + \mathrm{e}^{-i\phi}}{2} = \frac{z + 1/z}{2} \tag{10.2}$$

$$\sin\phi \;=\; \frac{\mathrm{e}^{i\phi} - \mathrm{e}^{-i\phi}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i} \tag{10.3}$$

oraz

$$dz = i\mathrm{e}^{i\phi} d\phi \qquad => \qquad d\phi = \frac{dz}{iz}\,. \tag{10.4}$$

Wtedy

$$\boxed{I = \oint\limits_{|z|=1} F\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right)\frac{dz}{iz}} \tag{10.5}$$

Całkę tą możemy obliczyć licząc residua funkcji podcałkowej wewnątrz konturu całkowania.

Przykłady

1. Udowodnimy, że

$$\boxed{I = \int_0^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi = \pi} \tag{10.6}$$

Wykonując podstawienia otrzymujemy

$$I = \oint_{|z|=1} \left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2 \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{4i} \oint_{|z|=1} \left(z - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3}\right) dz$$

$$= -\frac{1}{4i}(2\pi i)(-2) = \pi\,, \tag{10.7}$$

gdyż residuum funkcji podcałkowej w punkcie $z = 0$ wynosi -2.

2. Podobnie, udowodnimy wzór

$$\boxed{I = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{a + b\cos\phi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\,, \qquad a > |b| > 0} \tag{10.8}$$

Wykonując podstawienia otrzymujemy

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{a + b(z^2+1)/2z} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{ib} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + (2a/b)z + 1}\,.$$

Mianownik zeruje się w dwóch punktach

$$z_1 = (-a + \sqrt{a^2-b^2})/b\,, \qquad z_2 = (-a - \sqrt{a^2-b^2})/b$$

spełniających równanie

$$z_1 z_2 = 1\,.$$

Stąd $|z_1| = 1/|z_2| < 1$ i tylko punkt z_1 leży wewnątrz konturu całkowania. Licząc residuum w tym punkcie otrzymamy

$$I = \frac{2}{ib} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{2}{ib} \frac{2\pi i}{(z_1 - z_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\,. \tag{10.9}$$

10.2 Całki funkcji wymiernych

Funkcja wymierna to funkcja postaci

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{10.10}$$

gdzie $P(z)$ i $Q(z)$ są wielomianami odpowiednio stopnia n_P i n_Q.

Udowodnijmy na początek, że

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi} \tag{10.11}$$

licząc całkę zespoloną po konturze zamkniętym

$$\oint\limits_{C(R)} \frac{dz}{1+z^2} = \int\limits_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2}, \tag{10.12}$$

gdzie C_R^+ jest półokręgiem w górnej półpłaszczyźnie o promieniu $R \to \infty$. Funkcja podcałkowa

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \tag{10.13}$$

ma w górnej półpłaszczyźnie biegun prosty w $z = i$ z residuum równym

$$b_1(i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \tag{10.14}$$

Stąd całka (10.12) jest równa $2\pi i/(2i) = \pi$, niezależnie od wartości $R > 1$ Pokażemy, że całka po C_R^+ dąży do zera gdy $R \to \infty$. Parametryzując

$$z = R\mathrm{e}^{i\phi}, \qquad dz = iR\mathrm{e}^{i\phi} d\phi, \tag{10.15}$$

otrzymujemy bowiem

$$\left| \int\limits_0^{\pi} \frac{R\, i\, \mathrm{e}^{i\phi}\, d\phi}{1+R^2\mathrm{e}^{2i\phi}} \right| \leqslant \int\limits_0^{\pi} \frac{R\, d\phi}{|1+R^2\mathrm{e}^{2i\phi}|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) \to 0 \tag{10.16}$$

Tak więc ostatecznie

$$\oint\limits_{C(\infty)} \frac{1}{1+z^2} dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi. \tag{10.17}$$

Udowodnimy następnie wzór

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}} \tag{10.18}$$

licząc całkę zespoloną po konturze zamkniętym w górnej części płaszczyzny zespolonej

$$\oint_{C(R)} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{1+x^2}\,dx + \int_{C_R^+} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2}\,dz\,. \tag{10.19}$$

Jedynym punktem osobliwym w górnej półpłaszczyźnie jest biegun prosty w $z=i$ z residuum

$$b_1(i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\mathrm{e}^{ix}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2i}\,. \tag{10.20}$$

Stą całka (10.19) jest równa $2\pi i/(2ie) = \pi/e$.

Całka po konturze C_R^+ znika gdy $R\to\infty$, gdyż ze względu na warunek $\sin\phi > 0$ dla $\phi\in[0,\pi]$, czynnik eksponencjalny znika

$$\left|\mathrm{e}^{iz}\right| = \left|\mathrm{e}^{i(R\cos\phi + i\sin\phi)}\right| = \mathrm{e}^{-R\sin\phi} \;\to\; 0\,. \tag{10.21}$$

Tak więc ostatecznie

$$\oint_{C(\infty)} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}\,. \tag{10.22}$$

Zapisując oddzielnie częśc rzeczywistą i urojoną całki, znajdujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}\,, \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = 0\,. \tag{10.23}$$

Ostatnia całka znika ze względu na nieparzystość funkcji podcałkowej. Parzystość funkcja podcałkowa w pierwszej całce, prowadzi natomiast do wzoru

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}\,. \tag{10.24}$$

Jako podsumowanie otrzymujemy następujący dla funkcji wymiernych

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{i_{upper}} b_1(z_i)} \tag{10.25}$$

gdzie $a > 0$ jest liczbą rzeczywistą, a sumujemy po residuach funkcji podcałkowej w górnej półpłaszczyźnie. Ponadto, wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ spełniają następujące warunki:

- $Q(x)$ nie ma zer na osi rzeczywistej,
- stopień $Q(x)$ jest przynajmniej o jeden większy niż stopień $P(x)$, tzn. $n_Q \geqslant n_P + 1$,
- dla $a = 0$ ostatni warunek jest mocniejszy: $n_Q \geqslant n_P + 2$.

10.3 Całki funkcji wieloznacznych

Udowodnimy, że dla $0 < p < 1$ zachodzi

$$\boxed{\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}} \tag{10.26}$$

Funkcja podcałkowa, traktowana jako funkcja zmiennej zespolonej z,

$$f(z) = \frac{z^{p-1}}{1+z} = \frac{\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}}{1+z}, \tag{10.27}$$

ma cięcie wzdłuż dowolnej półprostej o początku w punkcie $z = 0$ ze względu na logarytm. Wybierzmy cięcie wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej. Tuż powyżej cięcia funkcja ma wartość

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{(p-1)\ln x}}{1+x} = \frac{x^{p-1}}{1+x}, \tag{10.28}$$

natomiast tuż poniżej cięcia

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{(p-1)(\ln x + 2i\pi)}}{1+x} = \frac{x^{p-1}}{1+x} \mathrm{e}^{2i\pi p} \tag{10.29}$$

Rozważmy następnie całkę zespoloną

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}}{1+z}\,dz \tag{10.30}$$

po konturze zamkniętym

$$C = R_+ \cup C_R \cup (-R_-) \cup (-C_r)$$

w granicy gdy $r \to 0$ oraz $R \to \infty$. Kontur $R_\pm$ to dodatnia półoś rzeczywista tuż powyżej (+) i tuż poniżej (−) cięcia. Jedyny punkt osobliwy wewnątrz konturu całkowania to biegun $z = -1$ z residuum równym

$$b_1(-1) = (-1)^{p-1} = \mathrm{e}^{(p-1)\ln(-1)} = \mathrm{e}^{i(p-1)\pi} = -\mathrm{e}^{i\pi p}.$$

Tak więc całka (10.30) jest równa $-2\pi i\mathrm{e}^{i\pi p}$.

Całki wzdłuż cięcia są równe

$$\int_{R_+} - \int_{R_-} = \left\{1 - \mathrm{e}^{2i\pi p}\right\} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx\,.$$

Całka wzdłuż C_r znika w granicy $r \to 0$, gdyż dla $z = r\mathrm{e}^{i\phi}$ i $p > 0$ mamy:

$$\left|\int_{C_r}\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \left|\frac{r^{p-1}\mathrm{e}^{i(p-1)\phi}}{1+r\mathrm{e}^{i\phi}}\,ri\mathrm{e}^{i\phi}\right| d\phi = r^p \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{|1+r\mathrm{e}^{i\phi}|} = \mathcal{O}(r^p) \to 0.$$

Podobnie, dla okręgu C_R w granicy $R \to \infty$ otrzymujemy dla $p < 1$:

$$\left|\int_{C_R}\right| \leqslant R^p \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{|1+R\mathrm{e}^{i\phi}|} = \mathcal{O}(R^{p-1}) \to 0.$$

Zbierając wzory znajdujemy w granicy $r \to 0$ i $R \to \infty$

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{(p-1)\ln z}}{1+z}\,dz = \left\{1 - \mathrm{e}^{2i\pi p}\right\} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} = -2\pi i\,\mathrm{e}^{i\pi p}.$$

Tym samym udowodniliśmy

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{2\pi i\,\mathrm{e}^{i\pi p}}{\mathrm{e}^{2i\pi p-1}} = \pi\frac{2i}{\mathrm{e}^{i\pi p} - \mathrm{e}^{-i\pi p}} = \frac{\pi}{\sin \pi p}\,. \tag{10.31}$$

Przykład

1. Korzystając ze wzoru (10.26) obliczymy całkę

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi\,.$$

Wykład 11

Metoda punktu siodłowego

Chcemy policzyć całkę

$$I(t) = \int_C g(z)\,\mathrm{e}^{t\,F(z)}\,dz\,, \qquad\qquad t \to \infty\,, \tag{11.1}$$

gdzie $F(z)$ jest funkcją analityczną w obszarze, w którym rozważamy całkę. Funkcja $g(z)$ jest na tyle wolnozmienna, że funkcja podcałkowa jest zdominowana przez eksponentę.

Załóżmy, że $F(z)$ ma punkt $z_0 = x_0 + iy_0$, w którym pochodna znika

$$\frac{dF}{dz}(z_0) = 0\,. \tag{11.2}$$

Punkt taki nazywamy "punktem siodłowym" z powodu, który zostanie wyjaśniony w dalszej części tego wykładu. Znikanie pochodnej zespolonej oznacza, że znikają również pochodne cząstkowe części rzeczywistej i urojonej funkcji F w tym punkcie

$$u_x(x_0,y_0) = u_y(x_0,y_0) = v_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \tag{11.3}$$

Rozwińmy część rzeczywistą u w otoczeniu punktu siodłowego

$$u(x,y) \approx u(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\Delta x\,, \Delta y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{xx}(z_0) & u_{xy}(z_0) \\ u_{yx}(z_0) & u_{yy}(z_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} \tag{11.4}$$

gdzie $\Delta x = x - x_0$ i $\Delta y = y - y_0$. Zdefiniujemy następnie kierunki własne macierzy drugich pochodnych. Jest to macierz symetryczna, gdyż z analityczności F wynika $u_{xy} = u_{yx}$. Otrzymane wartości własne będą więc rzeczywiste, a wektory własne wzajemnie ortogonalne.

Obliczmy najpierw wartości własne,

$$\det\begin{pmatrix} u_{xx}-\lambda & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy}-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(u_{xx}+u_{yy}) + u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0 \tag{11.5}$$

Z równan Cauchego-Riemanna wynika, że u jest funkcją harmoniczną

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{11.6}$$

co prowadzi do następujących wartości własnych

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{u_{xy}^2 + u_{xx}^2} \equiv \pm\lambda \tag{11.7}$$

gdzie drugie pochodne są obliczone w punkcie z_0. Wektory własne $(\Delta x_{\pm}, \Delta y_{\pm})$ spełniają równanie

$$\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & -u_{xx} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_{\pm} \\ \Delta y_{\pm} \end{pmatrix} = \pm\lambda\begin{pmatrix} \Delta x_{\pm} \\ \Delta y_{\pm} \end{pmatrix} \tag{11.8}$$

Badając zmianę funkcji $u(x,y)$ wzdłuż kierunków własnych otrzymujemy

$$u(x,y) \approx u(x_0,y_0) \pm \tfrac{1}{2}\lambda\Big((\Delta x_{\pm})^2 + (\Delta y_{\pm})^2\Big) \tag{11.9}$$

Widzimy, że wektory własne definiują kierunki największego wzrostu części rzeczywistej u, gdy

$$u(x,y) \approx u(z_0) + \frac{\sqrt{u_{xy}^2(z_0) + u_{xx}^2(z_0)}}{2} \tag{11.10}$$

oraz kierunek największego spadku, gdy

$$u(x,y) \approx u(z_0) - \frac{\sqrt{u_{xy}^2(z_0) + u_{xx}^2(z_0)}}{2} \tag{11.11}$$

gdzie unormowaliśmy długość wektorów własnych do jedynki. Otrzymujemy więc zachowanie funkcji typu "siodło", co tłumaczy nazwę punktu z_0.

Rozwijając część urojoną v wokół z_0 otrzymujemy

$$v(x,y) \approx v(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\Big(\Delta x\,,\,\Delta y\Big)\begin{pmatrix} v_{xx} & v_{xy} \\ v_{yx} & v_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{11.12}$$

Pokażemy, że wyraz z drugimi pochodnymi znika dla kierunków własnych części rzeczywistej u. W tym celu zauważmy, że z równań Cauchego-Riemanna oraz warunku własnego (11.8), otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} v_{xx} & v_{xy} \\ v_{yx} & v_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_\pm \\ \Delta y_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{xy} & u_{xx} \\ u_{xx} & u_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_\pm \\ \Delta y_\pm \end{pmatrix} = \pm\lambda \begin{pmatrix} -\Delta y_\pm \\ \Delta x_\pm \end{pmatrix} \tag{11.13}$$

skąd wynika

$$v(x,y) \approx v(x_0,y_0) \pm \frac{\lambda}{2} \Big(\Delta x\,,\,\Delta y\Big) \begin{pmatrix} -\Delta y \\ \Delta x \end{pmatrix} = v(x_0,y_0) \tag{11.14}$$

Tak więc dla odchyleń wzdłuż kierunków własnych,

$$z - z_0 = r\,\mathrm{e}^{i\alpha_\pm} \tag{11.15}$$

funkcja $F(z)$ ma **stałą część urojoną** w rozwinięciu z dokładnością do członu kwadratowego

$$F(z) \approx u(z_0) + iv(z_0) \pm \tfrac{1}{2}\,r^2\sqrt{u_{xy}^2(z_0) + u_{xx}^2(z_0)} \tag{11.16}$$

Aby zapisać prawą stronę przy pomocy pochodnej F skorzystajmy z rozwinięcia Taylora

$$F(z) \approx F(z_0) + \tfrac{1}{2}\,(z-z_0)^2\,F''(z_0) = F(z_0) + \tfrac{1}{2}\,(r^2\,\mathrm{e}^{2i\alpha_\pm})\,F''(z_0) \tag{11.17}$$

Porównując z (11.16), otrzymujemy

$$\pm\sqrt{u_{xy}^2(z_0) + u_{xx}^2(z_0)} = \mathrm{e}^{2i\alpha_\pm}\,F''(z_0)\,. \tag{11.18}$$

Obliczając moduł obu stron dostajemy ostateczną relację dla wartości F wzdłuż kierunków własnych

$$F(z) \approx F(z_0) \pm \tfrac{1}{2}\,r^2|F''(z_0)|\,. \tag{11.19}$$

Warunek analityczności F pozwala zdeformować kontur całkowania tak, by pokrywał się z kierunkiem największego spadku odpowiadający znakowi minus we wzorze (11.19). Podstawiając (11.19) do (11.1), otrzymujemy

$$\begin{aligned} I(t) &\approx \int_C g(z)\,\exp\Big\{\,t\,(F(z_0) - \tfrac{1}{2}\,r^2|F''(z_0)|)\Big\}\,dz \\ &= g(z_0)\,\mathrm{e}^{t\,F(z_0)}\,\mathrm{e}^{i\alpha_-}\int_C \exp\Big\{-\tfrac{1}{2}\,r^2 t|F''(z_0)|\Big\}\,dr \end{aligned} \tag{11.20}$$

Jeżeli $t \to \infty$, nie popełnimy dużego błędu rozszerzając granice całkowania

$$I(t) \approx g(z_0)\, \mathrm{e}^{tF(z_0)}\, \mathrm{e}^{i\alpha_-} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\, r^2 t\, |F''(z_0)|\right\} dr\,. \tag{11.21}$$

Wykorzystując dobrze znany wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\tfrac{1}{2}\, ax^2\}\, dx = \sqrt{2\pi/a}\,, \tag{11.22}$$

ostatecznie otrzymujemy dla $t \to \infty$

$$\boxed{I(t) \approx g(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{t\,|F''(z_0)|}}\; \mathrm{e}^{t\,F(z_0)}\; \mathrm{e}^{i\alpha_-}} \tag{11.23}$$

W sytuacji gdy funkcja F ma więcej punktów siodłowych, deformujemy kontur całkowania C tak, by przez nie przechodził. Prowadzi to do sumowania wkładów od każdego z nich w (11.23).

Wykład 12

Funkcje specjalne

12.1 Funkcja gamma Eulera

Jest to funkcja argumentu zespololonego zdefiniowano poprzez całkę wzdłuż osi rzeczywistej

$$\boxed{\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt} \tag{12.1}$$

Funkcja e^{-t} zapewnia zbieżność całki w nieskończoności. Granica $t \to 0$ wymaga zbadania wielkości

$$|t^{z-1}| = |\mathrm{e}^{(z-1)\ln t}| = |t^{x-1}\,\mathrm{e}^{iy\ln t}| = t^{x-1}\,.$$

Stąd

$$|\Gamma(z)| \leqslant \int\limits_0^\infty |t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}|\,dt \leqslant \int\limits_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt\,.$$

Widzimy, że dla $x > 0$ całka jest zbieżna dla $t \to 0$. Dla $x = 0$ całka jest rozbieżna logarytmicznie w zerze. Stąd warunek $\mathrm{Re}\,z > 0$ by definicja (12.1) miała sens.

Tak zdefniowana gamma jest analityczna w prawej półpłaszczyźnie. Można ją jednka rozszerzyć analitycznie na całą płaszczyznę korzystając ze wzoru otrzymanego poprzez całkowanie przez części

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,d(t^z) = \frac{t^z}{z}\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^\infty + \frac{1}{z}\int\limits_0^\infty t^z\,\mathrm{e}^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(z+1)}{z}\,. \tag{12.2}$$

Wzór ten definiuje przedłużenie analitycznie do obszaru $-1 < \operatorname{Re} z \leqslant 0$. W punkcie $z = 0$ otrzymujemy biegun prosty z residuum

$$\lim_{z \to 0} z\,\Gamma(z) = \Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, dt = 1\,. \tag{12.3}$$

Postępując podobnie z $\Gamma(z+1)$ otrzymamy wzór dla obszaru $\operatorname{Re} z > -2$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}\,. \tag{12.4}$$

W ten sposób dla dowolnego naturalnego n, znajdujemy

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\,, \qquad \operatorname{Re} z > -n\,. \tag{12.5}$$

Widzimy, że $\Gamma(z)$ może być przedłużona analitycznie na całą płaszczyżnę zespoloną z wyjątkiem punktów $z = 0, -1, -2\ldots$, w których ma bieguny proste. Obliczając residuum w punkcie $z = -n$, znajdujemy

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to -n} (z+n)\,\Gamma(z) &= \lim_{z \to -n} \frac{(z+n)\,\Gamma(z+n+1)}{(z)(z+1)\ldots(z+n-1)(z+n)} \\
&= \frac{\Gamma(-n+n+1)}{(-n)(-n+1)\ldots(-n+n-1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\,.
\end{aligned} \tag{12.6}$$

W obszarze $\operatorname{Re} z > 0$ wzór (12.2) można zapisać w postaci

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)} \tag{12.7}$$

Obliczając przy jego pomocy kolejne wartości w punktach całkowitych dodatnich znajdujemy

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 1 \\
\Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \\
\Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1\,.
\end{aligned} \tag{12.8}$$

Stąd dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!} \tag{12.9}$$

lub po zapisaniu przy użyciu reprezentacji całkowej

$$n! = \int\limits_0^\infty t^n\, \mathrm{e}^{-t}\, dt\,. \tag{12.10}$$

Przykład
Policzmy zamieniając zmienne: $x = \mathrm{e}^{-u}$,

$$\int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{z-1} dx = \int_0^\infty u^{z-1}\,\mathrm{e}^{-u}\,du = \Gamma(z)\,. \tag{12.11}$$

Otrzymaliśmy nową reprezentację całkową gammy.

12.2 Gamma dla połówkowych z

Wartości gammy dla połówkowych wartości $z = m/2$, gdzie m jest liczbą całkowitą, można znaleźć przy pomocy wzoru

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}\,. \tag{12.12}$$

Udowodnimy go rozważając iloczyn całek

$$I^2 = \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\mathrm{e}^{-x^2}\right\}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\,\mathrm{e}^{-y^2}\right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,. \tag{12.13}$$

Zmieniając zmienne na biegunowe

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{12.14}$$

otrzymujemy

$$I^2 = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\infty} dr\,r\,\mathrm{e}^{-r^2} = \pi \int\limits_0^{\infty} dr^2\,\mathrm{e}^{-r^2} = \pi\,. \tag{12.15}$$

Stąd wynika wzór (12.12).

Tak więc dla $z = 1/2$ otrzymamy

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\sqrt{t})^2}\,d(\sqrt{t}) = \sqrt{\pi}\,. \tag{12.16}$$

Korzystając ze wzoru (12.7), znajdujemy

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\sqrt{\pi}\end{aligned} \tag{12.17}$$

W ogólności dla $n \geqslant 0$ można udowodnić przez indukcję

$$\boxed{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\,n!}\sqrt{\pi}} \tag{12.18}$$

Dla ujemnych połówek wykorzystujemy wzór (12.2), na przykład

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-1/2} = -\frac{2}{1}\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{-3/2} = -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)^2\,\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

W ogólności dla $n \geqslant 0$ zachodzi

$$\boxed{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-2)^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\sqrt{\pi} = (-1)^{n+1}\,\frac{2^{2n+1}\,n!}{(2n+1)!}\sqrt{\pi}} \tag{12.19}$$

12.3 Niekompletna funkcja gamma

Definiuje się także niekompletną funkcję gamma

$$\Gamma(z,x) = \int_x^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}dt\,, \tag{12.20}$$

a także

$$\gamma(z,x) = \int_0^{x} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}dt\,, \tag{12.21}$$

gdzie $x \geqslant 0$ jest zawsze rzeczywiste, natomiast $\mathrm{Re}\,z > 0$. W oczywisty sposób zachodzi

$$\gamma(z,x)+\Gamma(z,x) = \Gamma(z)\,, \qquad \Gamma(z,0) = \Gamma(z)\,. \tag{12.22}$$

Przy pomocy tych funkcji definiuje sie inne:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2},x^2\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt \tag{12.23}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2},x^2\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{12.24}$$

Tak więc

$$\operatorname{erfc}(x) + \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = 1\,. \tag{12.25}$$

Ponadto

$$\Gamma(1,x) = e^{-x}\,, \qquad \gamma(1,x) = 1-e^{-x}\,. \tag{12.26}$$

12.4 Funkcja beta Eulera

Jest to funkcja zdefiniowana poprzez całkę

$$\boxed{B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\,, \qquad p,q>0} \tag{12.27}$$

Zmieniając zmienne $x \leftrightarrow (1-x)$ łatwo sie przekonać, że beta jest funkcją symetryczną

$$B(p,q) = B(q,p)\,. \tag{12.28}$$

Zmieńmy zmienną całkowania na

$$x = \sin^2\theta\,, \qquad dx = 2\sin\theta\cos\theta\,, \tag{12.29}$$

z zakresem $\theta \in [0,\pi/2)$. Wtedy $(1-x) = \cos^2\theta$ i stąd

$$\boxed{B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta} \tag{12.30}$$

Inną reprezentację bety otrzymujemy zmieniając zmienne na

$$x = \frac{y}{1+y}\,, \qquad (1-x) = \frac{1}{1+y}\,, \qquad dx = \frac{dy}{(1+y)^2} \tag{12.31}$$

z zakresem całkowania $y \in [0, \infty)$. Wtedy

$$\boxed{B(p,q) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\, dy} \tag{12.32}$$

Funkcje beta i gamma Eulera łączy wzór, który może posłużyć do przedłużenia analitycznego funkcji beta

$$\boxed{B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} \tag{12.33}$$

Dowód równości (12.33) rozpoczniemy zmieniając zmienne $t = y^2$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt = 2\int_0^\infty y^{2p-1}\,\mathrm{e}^{-y^2}dy\,. \tag{12.34}$$

Mnożąc dwie funkcje gamma przez siebie, otrzymujemy wzór (12.33)

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\,\Gamma(q) &= \left\{2\int\limits_0^\infty x^{2p-1}\,\mathrm{e}^{-x^2}dx\right\}\left\{2\int\limits_0^\infty y^{2q-1}\,\mathrm{e}^{-y^2}dy\right\} \\
&= 4\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty x^{2q-1}y^{2p-1}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\
&= 4\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{\pi/2}(r\cos\theta)^{2q-1}(r\sin\theta)^{2p-1}\,\mathrm{e}^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta \\
&= \left\{\int\limits_0^\infty (r^2)^{(p+q)-1}\,\mathrm{e}^{-r^2}\,dr^2\right\}\left\{2\int\limits_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta\right\} \\
&= \Gamma(p+q)\,B(p,q)\,.
\end{aligned}$$

Łącząc wzory (12.32) i (12.33) znajdujemy dla $p, q > 0$

$$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} \tag{12.35}$$

Przykład
Policzmy poniższą całkę zamieniając zmienne: $x = \sin\theta$,

$$I = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,d\theta$$

Porównując z (12.30) znajdujemy $2p-1=4$ oraz $2q-1=0$ i stąd

$$I = B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{(\sqrt{\pi})^2}{2!}\frac{1\cdot 3}{2^2} = \frac{3\pi}{8}\,.$$

12.5 Własności analityczne funkcji gamma

Kładąc $p+q=1$ we wzorze (12.35) i wykorzystując (10.26) dostajemy

$$\boxed{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin\pi p}} \tag{12.36}$$

Wzór ten można rozszerzyć analitycznie na całą płaszczyznę zespoloną. Odtwarza on prawidłowo strukturę biegunów funkcji gamma. Po prawej stronie mamy bieguny proste w punktach $p = z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Podobnie, po lewej otrzymujemy bieguny proste funkcji $\Gamma(z)$ dla $z = 0, -1, -2, \ldots$ oraz $\Gamma(1-z)$ dla $z = 1, 2, 3, \ldots$.

Funkcja $\sin(\pi z)$ jest całkowita, a więc $1/\sin(\pi z)$ nigdzie się nie zeruje. Wynika stąd, że $\Gamma(z)$ **nie ma zer**. Gdyby bowiem istniało zero to funkcja $\Gamma(1-z)$ musiałoby być w nim nieskończona. Jedynymi możliwymi punktami są $(1-z) = 0, -1, -2, \ldots$ co odpowiada $z = 1, 2, 3, \ldots$ w których to punktach $\Gamma(z)$ jest różna od zera, co jest sprzeczne z przyjętą hipotezą. Jako wniosek otrzymujemy, że $1/\Gamma(z)$ jest **funkcją całkowitą**.

12.6 Funkcja gamma podwojonego argumentu

Znajdziemy jeszcze wzór dla funkcji gamma podwojonego argumentu. Wykorzystując reprezentację (12.30) funkcji beta, policzmy

$$
\begin{aligned}
B(n,n) &= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2n-1}(\cos\theta)^{2n-1} d\theta \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}}\int_0^{\pi/2} (2\sin\theta\cos\theta)^{2n-1} d(2\theta) \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}}\int_0^{\pi} (\sin\phi)^{2n-1} d\phi \\
&= \frac{2}{2^{2n-1}}\int_0^{\pi/2} (\sin\phi)^{2n-1} d\phi \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}} B(n,\tfrac{1}{2}) . \qquad (12.37)
\end{aligned}
$$

Stąd po uwzględnieniu (12.33) mamy

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} = \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \qquad (12.38)$$

Wyliczając $\Gamma(2n)$, otrzymujemy

$$\boxed{\Gamma(2n) = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n)\Gamma(n+\tfrac{1}{2})} \qquad (12.39)$$

Wzór ten możemy rozszerzyć analitycznie na całą płaszczyznę zespoloną.

12.7 Funkcja zeta Riemanna

Funkcja zeta Riemana jest zdefiniowana dla zespolonych wartości z

$$\boxed{\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}} \qquad (12.40)$$

Występujący tu szereg jest *bezwzględnie zbieżny* dla $\mathrm{Re}\, z > 1$, gdyż szereg modułów

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n^{x+iy}|} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} \qquad (12.41)$$

jest zbieżny dla $x > 1$. Stąd wynika, że $\zeta(z)$ jest analityczna w obszarze zbieżności.

Znajdziemy reprezentację całkową zety, wykorzystując definicję funkcji gamma dla $\mathrm{Re}\, z > 0$, w której zamienimy zmienną: $u = nt$,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1}\, \mathrm{e}^{-u}\, du = n^z \int_0^\infty t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt. \tag{12.42}$$

Wyliczając $1/n^z$ dla $\mathrm{Re}\, z > 1$ i podstawiając do (12.40), otrzymujemy

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^\infty t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-nt}\, dt \right\} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nt} \right\} dt.$$

Sumując szereg pod całką

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-nt} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}, \tag{12.43}$$

otrzymujemy poszukiwaną reprezentację całkową fukcji zeta dla $\mathrm{Re}\, z > 1$

$$\boxed{\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt} \tag{12.44}$$

Funkcję tę można rozszerzyć na całą płaszczyznę zespoloną z wyjątkiem punktu $z = 1$, w którym ζ ma biegun prosty z residuum równym 1.

Przykład
Gęstość energii emitowanej przez ciało doskonale czarne na jednostkę częstości ν i jednostkę objętości V jest dana wzorem

$$\phi(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{h\nu/kT} - 1},$$

tak więc całkowita energia na jednostkę objętości to

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/kT} - 1}.$$

Wprowadzając zmienną $t = h\nu/kT$ dostajemy

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \zeta(4)\,\Gamma(4)\,.$$

Jak pokażemy w następnym rozdziale $\zeta(4) = \pi^4/90$ i stąd

$$\frac{E}{V} = \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 kT$$

12.8 Liczby Bernouliego

Liczby Bernouliego B_n są zdefiniowane poprzez rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $f(z) = z/(\mathrm{e}^z - 1)$ wokół $z = 0$

$$\boxed{\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{z^m}{m!}} \tag{12.45}$$

Szereg ten jest zbieżny w obszarze $|z| < 2\pi$, tzn. do najbliższej osobliwości funkcji $f(z)$ w $z = \pm 2\pi i$. Wykorzystując wzór (6.12), otrzymujemy dla dowolnego konturu C_0 w obszarze zbieżności, otaczającego $z = 0$:

$$B_m = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{w}{(\mathrm{e}^w - 1)} \frac{dw}{w^{m+1}}\,, \tag{12.46}$$

lub wkorzystając ze wzoru (6.13)

$$B_m = \frac{d^m}{dz^m} \left\{ \frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)\, z^m} \right\}\bigg|_{z=0}\,. \tag{12.47}$$

Najprościej jednak jest wyliczyć B_m mnożąc dwa szeregi

$$\left(z + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \right) \left(B_0 + B_1 \frac{z}{1!} + B_2 \frac{z^2}{2!} + B_3 \frac{z^3}{3!} + \ldots \right) = z \tag{12.48}$$

Porównanie współczynników przy kolejnych potęgach z po obu stronach daje

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ \tfrac{1}{2} B_0 + B_1 &= 0 \quad => \quad B_1 = -\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{3!} B_0 + \tfrac{1}{2!} B_1 + \tfrac{1}{2!} B_2 &= 0 \quad => \quad B_2 = \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

m	0	1	2	3	4	5
B_{2m}	1	1/6	$-1/30$	1/42	$-1/30$	5/66

Tablica 12.1: Kolejne liczby Bernouliego.

Z wyjątkiem $B_1 = -\frac{1}{2}$, wszystkie liczby Bernouliego z nieparzystym wskaźnikiem wynoszą zero.

$$\boxed{B_{2m-1} = 0} \tag{12.49}$$

Natomiast kolejne wartości dla parzystych wskaźników mają naprzemienny znak.

12.9 Związek liczb Bernouliego z funkcją zeta

Liczby Bernouliego są związane z dzetą Riemanna. Udowodnimy to wykorzystując wzór (12.46) dla $m \geqslant 2$, w którym kontur całkowania C_0 został zdeformowany tak by otoczyć *bieguny proste* funkcji

$$f(z) = \frac{z}{(\mathrm{e}^z - 1)} \tag{12.50}$$

w punktach $z = 2\pi n i$ dla $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Nowy kontur całkowania to

$$C = C_0 \cup [0, \infty) \cup (-C_\infty) \cup (-[0, \infty))\,.$$

Całka po trzech ostatnich konturach znika i wtedy

$$I = \oint\limits_{C_0} \frac{w}{(\mathrm{e}^w - 1)} \frac{dw}{w^{m+1}} = -2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{res} \left\{ \frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)\, z^m} \right\} \Bigg|_{z=2\pi n i}, \tag{12.51}$$

gdzie wykluczamy $n = 0$ z sumy. Znak minus po prawej stronie wynika z faktu, że kontur C nie jest zorientowany dodatnio względem swojego wnętrza.

Licząc residua otrzymujemy

$$B_m = \frac{m!}{2\pi i} I = -m! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n i)^m} = -\frac{m!}{(2\pi i)^m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^m} \tag{12.52}$$

Dla $m \geqslant 2$ szereg jest zbieżny dla parzystych wartości $m = 2k$. Dla nieparzystych m wyrazy z przeciwnym znakiem w szeregu kasują się dając zero. Tak więc dla $k \geqslant 1$ otrzymujemy

$$\boxed{B_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{2\,(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\, \zeta(2k)} \tag{12.53}$$

Zauważając, że $(-1)^{k+1} B_{2k} > 0$, otrzymujemy

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(2\pi)^{2k}}{2\,(2k)!} |B_{2k}|\,. \tag{12.54}$$

Stąd kilka kolejnych wartości funkcji dzeta dla liczb parzystych

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}\,, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}\,. \tag{12.55}$$

12.10 Rozwinięcia w szereg a liczby Bernouliego

Wiele rozwinięć funkcji w szereg zawiera liczby Bernouliego.

1. Jednym z nich jest rozwinięcie funckcji $\operatorname{ctg} z$ wokół $z = 0$. Rozważmy

$$z \operatorname{ctg} z = iz \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}} = iz \frac{\mathrm{e}^{2iz} + 1}{\mathrm{e}^{2iz} - 1} = iz + \frac{2iz}{\mathrm{e}^{2iz} - 1} \tag{12.56}$$

Podstawiając (12.45) dla $z \to 2iz$, otrzymamy szereg potęgowy wokół $z = 0$ w kole $|z| < \pi$ (do najbliższej osobliwości $\operatorname{ctg} z$),

$$\begin{aligned} z \operatorname{ctg} z &= iz + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{(2iz)^m}{m!} \\ &= iz + 1 - iz + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \frac{(2iz)^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2z)^{2k}\,. \end{aligned} \tag{12.57}$$

Stąd poszukiwane rozwinięcie

$$\boxed{\operatorname{ctg} z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!}\, B_{2k}\, z^{2k-1}} \tag{12.58}$$

prowadzące do kilku pierwszych wyrazów

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} + \cdots . \tag{12.59}$$

2. Podobnie, rozważając funkcję $\operatorname{cosec} z = 1/\sin z$ znajdujemy następujące rozwinięcie w obszarze $0 < |z| < \pi$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cosec} z &= \frac{2i}{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}} = \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z} \frac{2iz}{\mathrm{e}^{2iz} - 1} \\
&= \frac{1}{z} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \right\} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{(2iz)^m}{m!} \right\} \\
&= \frac{1}{z} \left(1 + iz - \frac{z^2}{2} - \frac{iz^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \ldots \right) \left(1 - iz - \frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{45} + \ldots \right)
\end{aligned}$$

i stąd kilka pierwszych wyrazów po pomnożeniu szeregów

$$\boxed{\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \cdots} \tag{12.60}$$

Wykład 13

Sumy szeregów i zera funkcji

13.1 Sumowanie szeregów

Metoda obliczania całek przy pomocy residuów jest także przydatna przy sumowaniu szeregów.

Rozważmy na początek funkcję

$$\boxed{\pi \operatorname{ctg} \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}} \tag{13.1}$$

Jej osobliwościami są izolowane punkty osobliwe w $z_n = n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, będące biegunami prostymi. Policzmy residua w tych punktach

$$b_1(z_n) = \lim_{z \to n} \pi (z - n) \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{\cos \pi n}{\cos \pi n} = 1 \,. \tag{13.2}$$

Podobnie, rozważmy funkcję

$$\boxed{\pi \operatorname{cosec} \pi z = \frac{\pi}{\sin \pi z}} \tag{13.3}$$

posiadającą bieguny proste w tych samych punktach $z_n = n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Tym razem residua wynoszą

$$b_1(z_n) = \lim_{z \to n} \frac{\pi (z - n)}{\sin \pi z} = \frac{1}{\cos \pi n} = (-1)^n \,. \tag{13.4}$$

Obie funkcje są przykładem funkcji *meromorficznej – posiadającej jedynie izolowane punkty osobliwe w postacie biegunów.*

Po tym przygotowaniu rozważmy całke po okręgu C_R o środku w $z=0$

$$I_R = \oint_{C_R} \pi \operatorname{ctg}(\pi z)\, f(z)\, dz\,, \tag{13.5}$$

gdzie $f(z)$ jest funkcją meromorficzną z biegunami $\{z_i\}$ różnymi od biegunów $\{z_n\}$ funkcji $\pi \operatorname{ctg} \pi z$.

Zgodnie z twierdzeniem o residuach, I_R jest zadana przez sumę po wszystkich residuach zawartych we wnętrzu okręgu C_R. Policzmy residua w punktach z_n korzystając ze wzoru (13.2):

$$b_1(z_n) \,=\, \lim_{z\to n} \{f(z)\, \pi \operatorname{ctg} \pi z\} \,=\, f(n) \tag{13.6}$$

Pozostają jeszcze do obliczenia residua w biegunach z_i funkcji $f(z)$ leżace wewnątrz konturu całkowania:

$$b_1(z_i) \,=\, \operatorname{res}\{f(z)\, \pi \operatorname{ctg} \pi z\}\big|_{z=z_i} \tag{13.7}$$

Ostateczny wzór zależy od rzędu bieguna. Uwzględniając wszystkie bieguny wewnątrz konturu C_R, otrzymujemy

$$\frac{1}{2\pi i}\, I_R = \sum_n f(n) + \sum_i \operatorname{res}\{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)\, f(z)\}\big|_{z=z_i}\,. \tag{13.8}$$

Funkcja $\operatorname{ctg} \pi z$ jest ograniczona w nieskończoności, gdyż w granicy $R\to\infty$ dla $z=R(\cos\phi + i \sin\phi)$ otrzymujemy niezależnie od kąta ϕ

$$|\operatorname{ctg} \pi z| \,=\, \frac{|\mathrm{e}^{\pi R \sin\phi} + \mathrm{e}^{-\pi R \sin\phi}|}{|\mathrm{e}^{\pi R \sin\phi} - \mathrm{e}^{-\pi R \sin\phi}|} \;\to\; 1\,, \tag{13.9}$$

Jeżeli funkcja $f(z)$ zachowuje się dla dużych R tak, że

$$|f(z)| \sim \frac{1}{R^{1+\delta}}\,, \qquad \delta > 0 \tag{13.10}$$

to w granicy $R\to\infty$ całka $I_R = 0$.

W rezultacie otrzymujemy wzór

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \,=\, -\sum_i \operatorname{res}\{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)\, f(z)\}\Big|_{z=z_i}} \tag{13.11}$$

gdzie sumujemy po wszystkich biegunach $\{z_i\}$ funkcji $f(z)$. Podobnie, rozważania przeprowadzone dla funkcji $\pi \operatorname{cosec} \pi z$ prowadzą do wzoru

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) \,=\, -\sum_i \operatorname{res}\{\pi \operatorname{cosec}(\pi z)\, f(z)\}\Big|_{z=z_i}} \tag{13.12}$$

13.1.1 Przykłady

1. Znajdźmy sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}\,. \tag{13.13}$$

Funkcja

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2} \tag{13.14}$$

ma dwa bieguny proste w $z_\pm = \pm ia$. Licząc residua w tych punktach, znajdujemy

$$\begin{aligned} b_1(z_+) &= \lim_{z\to ia} \frac{(z-ia)\,\pi\mathrm{ctg}\,\pi z}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{\pi\mathrm{ctg}\, i\pi a}{2\,ia} = -\frac{\pi}{2a}\,\mathrm{ctgh}\,\pi a \\ b_1(z_-) &= \lim_{z\to -ia} \frac{(z+ia)\,\pi\mathrm{ctg}\,\pi z}{(z+ia)(z-ia)} = \frac{\pi\mathrm{ctg}\, i\pi a}{2\,ia} = -\frac{\pi}{2a}\,\mathrm{ctgh}\,\pi a\,. \end{aligned}$$

Stąd suma po n we wzorze (13.11) wynosi

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} = \sum_{n=-\infty}^{-1} + \frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} = 2\sum_{n=1}^{\infty} + \frac{1}{a^2} = -\left\{b_1(z_+) + b_1(z_-)\right\}$$

i ostatecznie znajdujemy

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\,\mathrm{ctgh}\,\pi a + \frac{1}{2a^2}} \tag{13.15}$$

2. Policzmy sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,. \tag{13.16}$$

Odpowiadająca mu funkcja $f(z)=1/z^2$ nie spełnia założeń prowadzących do wzoru (13.11), gdyż biegun dwukrotny $f(z)$ w $z=0$ pokrywa się z jednym z biegunów cotangensa, stając się biegunem trójkrotnym funkcji podcałkowej. Możemy jednak łatwo zmodyfikować wzór (13.11) przesuwając ten punkt z sumy $\sum_n$ do sumy $\sum_i$ i licząc residuum funkcji $\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi z/z^2$,

$$b_1(0) = \mathrm{res}\left\{\frac{\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi z}{z^2}\right\}\Bigg|_{z=0} = -\frac{\pi^2}{3}\,. \tag{13.17}$$

Stąd suma po n ze wzoru (13.11) (bez wyrazu z $n=0$) to

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{1} + \sum_{n=1}^{\infty} = 2\sum_{n=1}^{\infty} = -b_1(0) \tag{13.18}$$

i ostatecznie znajdujemy

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.} \tag{13.19}$$

Wynik ten można też otrzymać z (13.19) w granicy $a \to 0$ po uprzednim odjęciu $1/a^2$.

3. Obliczmy sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \dots\,. \tag{13.20}$$

korzystając ze wzoru (13.12). Tak jak poprzednio usuwamy z sumy po n biegun dwukrotny funkcji $f(z) = 1/z^2$ w $z=0$ i liczymy residuum w tym puncie

$$b_1(0) = \operatorname{res}\left\{\frac{\pi \operatorname{cosec} \pi z}{z^2}\right\}\Bigg|_{z=0} = \frac{\pi^2}{6}\,. \tag{13.21}$$

Teraz suma po n we wzorze (13.12) to

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n = \sum_{n=-\infty}^{1} (-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -b_1(0)$$

i stąd wynik po uwzględnieniu brakującego czynnika (-1)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.} \tag{13.22}$$

4. Przy liczeniu residuów w przykładach 2. i 3. bardzo pożyteczne okazują się rozwinięcia (12.58) oraz (12.60) zawierające liczby Bernouliego:

$$\operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} - \frac{\pi^3 z^3}{45} - \frac{2\pi^5 z^5}{945} + \cdots \tag{13.23}$$

$$\operatorname{cosec} \pi z = \frac{1}{\pi z} + \frac{\pi z}{6} + \frac{7\pi^3 z^3}{360} + \cdots \tag{13.24}$$

Stąd też wynikają poniższe sumy szeregów odzwierciedlające związek (12.53) liczb Bernouliego (występujących w rozwinięciu) z wartościami dzety Riemana (jako sum szeregów):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = -\frac{1}{2} \operatorname{res} \left\{ \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^4} \right\} \Big|_{z=0} = \frac{\pi^4}{90} . \tag{13.25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = -\frac{1}{2} \operatorname{res} \left\{ \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^6} \right\} \Big|_{z=0} = \frac{\pi^6}{945} . \tag{13.26}$$

Ponadto, korzystając z (13.24) znajdujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{1}{2} \operatorname{res} \left\{ \frac{\pi \operatorname{cosec} \pi z}{z^4} \right\} \Big|_{z=0} = \frac{7\pi^4}{720} . \tag{13.27}$$

13.2 Poszukiwanie zer funkcji

Punkt z_0 nazywamy *$k-$krotnym zerem* funkcji analitycznej f jeżeli rozwinięcie Taylora wokół tego punktu ma postać

$$f(z) = a_k (z - z_0)^k + a_{k+1} (z - z_0)^{k+1} + \ldots = a_k (z - z_0)^k \{1 + \mathcal{O}(z - z_0)\}$$

gdzie $a_k \neq 0$. Dla pochodnej otrzymujemy

$$f'(z) = k\, a_k (z - z_0)^{k-1} \{1 + \mathcal{O}(z - z_0)\} .$$

Wtedy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{(z - z_0)} \frac{(1 + \mathcal{O}(z - z_0))}{(1 + \mathcal{O}(z - z_0))} = \frac{k}{(z - z_0)} + \text{część regularna} .$$

Tak więc, f'/f ma *biegun prosty* w $k-$krotnym zerze funkcji f z residuum równym k .

Załóżmy, że w innym punktcie z_1 funkcja f ma *biegun $m-$krotny*,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{b_m}{(z - z_1)^m} + \ldots + \frac{b_1}{(z - z_1)} + \text{część regularna} \\ &= \frac{b_m}{(z - z_1)^m} \{1 + \mathcal{O}(z - z_1))\} . \end{aligned} \tag{13.28}$$

Wtedy pochodna to

$$f'(z) = -m \frac{b_m}{(z-z_1)^{m+1}} \{1 + \mathcal{O}(z-z_1))\} .$$

Dzieląc obie funkcję otrzymamy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{(z-z_1)} \frac{(1 + \mathcal{O}(z-z_1))}{(1 + \mathcal{O}(z-z_1))} == \frac{-m}{(z-z_1)} + \text{część regularna} .$$

Tak więc, f'/f ma *biegun prosty* w $m-$krotnym biegunie funkcji f z residuum równym $-m$.

Stąd wynika następujące

Twierdzenie

Niech $f(z)$ będzie funkcją analityczną na krzywej zamkniętej C oraz w obszarze D ograniczonym tą krzywą, z wyjątkiem być może skończonej liczby biegunów w tym obszarze. Jeżeli $f(z) \neq 0$ na krzywej C to

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P} \tag{13.29}$$

gdzie Z to liczba zer funkcji $f(z)$ (wraz z ich krotnością), a P to liczba biegunów tej funkcji (wraz z ich rzędem) w obszarze D.

Każde zero lub biegun funkcji f wnoszą bowiem do rozważanej całki residuum równe odpowiednio ich krotności lub rzędowi.

13.2.1 Zasada argumentu

Zauważmy, że

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d \ln f(z)}{dz} , \tag{13.30}$$

tak więc

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_C d \ln f(z) = \Delta_C \ln f(z) , \tag{13.31}$$

gdzie $\Delta_C \ln f(z)$ jest przyrostem wartości $\ln f(z)$ przy pełnym obiegu argumentu z po krzywej C w kierunku dodatnim. Ponieważ

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i\,\mathrm{arg} f(z) \tag{13.32}$$

to przy obiegu C może się zmienić jedynie argument funkcji, natomiast jej moduł powraca do wyjściowej wartości.

Otrzymujemy w ten sposób *zasadę argumentu*

$$\boxed{Z - P = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_C \arg f(z)} \tag{13.33}$$

Wielkość $Z-P$ jest liczbą całkowitą, a więc argument $f(z)$ zmienia się o całkowitą wielokrotność kąta pełnego 2π. Badając ile razy krzywa C_w, będąca obrazem krzywej zamkniętej C poprzez odwzorowanie meromorficzne $w=f(z)$, okrąża zero w płaszczyźnie w możemy znaleźć liczbę

$$N = Z - P, \tag{13.34}$$

nazywaną *indeksem* krzywej C_w względem punktu $w=0$.

13.2.2 Twierdzenie Rouché'a

Brzmi ono.

Jeżeli dwie funkcje $f(z)$ i $g(z)$ są analityczne wewnątrz i na konturze C oraz spełniają nierówność

$$|g(z)| < |f(z)| \tag{13.35}$$

na konturze C to $f(z)+g(z)$ ma wewnątrz C tą samą liczbę zer co $f(z)$.

Rozważmy bowiem argument funkcji $f+g$ dla punktów z na krzywej C

$$\begin{aligned} \arg(f+g) &= \arg(f[1+g/f]) \\ &= \arg f + \arg(1+g/f)\,. \end{aligned}$$

Wartości funkcji $w = 1+g(z)/f(z)$ spełniają na podstawie założenia związek

$$|w-1| = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1 \tag{13.36}$$

co oznacza, że funkcja ta nie okrąża zera w płaszczyźnie w przy obiegu z po konturze C. Tym samym zmiana argumentu Δ_C dla tej funkcji wynosi zero. Stąd teza twierdzenia

$$\frac{1}{2\pi}\arg\left(f(z)+g(z)\right) = \frac{1}{2\pi}\arg f(z) = Z\,. \tag{13.37}$$

Przy pomocy twierdzenia Rouchégo możemy raz jeszcze udowodnić, że wielomian $w(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ ma dokładnie n zer na płaszczyźnie zespolonej, rozważając

$$f(z) = a_n z^n\,, \qquad g(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}\,.$$

Na okręgu o środku w $z=0$ i promieniu $R\geqslant 1$ zachodzi

$$|g(z)|\leqslant |a_0|+|a_1|R+\ldots+|a_{n-1}|R^{n-1}\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)R^{n-1}\leqslant |a_n|R^n=|f(z)|$$

pod warunkiem, że

$$R\geqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right)/|a_n|\geqslant 1\,. \tag{13.38}$$

Jeśli ostatnia nierówność nie jest spełniona wtedy $R=1$. Tym samym, wewnątrz tego okręgu $w(z)=f(z)+g(z)$ ma tyle samo zer co $f(z)$ czyli n.

Przykład
Wielomian $w(z)=1+z+z^2+z^3$ ma trzy zera wewnątrz okręgu o środku w $z=0$ i promieniu $R=(1+1+1)/1=3$.

Wykład 14

Funkcje całkowite i meromorficzne

Przpomnijmy, że funkcje analityczną na całej płaszczyźnie zespolonej nazywamy *całkowitą*. Funkcję analityczną posiadającą jedynie izolowane punkty osobliwe w postaci biegunów nazywamy *meromorficzną*.

Dowolny wielomian $W(z)$ jest funkcją całkowitą, natomiast $1/W(z)$ jest funkcją meromorficzną z biegunami w zerach wielomianu.

14.1 Rozkład na sumę nieskończoną

Każdą funkcję wymierną $P(z)/Q(z)$, gdzie P i Q są wielomianami, można rozłożyć na sumę ułamków prostych $a_k/(z-z_i)^k$, gdzie z_i są zerami wielomianu $Q(z)$, a tym samym biegunami funkcji wymiernej. Powstaje pytanie czy można w ten sam sposób rozłożyć funkcję meromorficzną, która może mieć nieskończenie wiele biegunów. Odpowiedź jest pozytywna.

Przykładem funkcji meromorficznej z nieskończoną liczba biegunów jest $f(z) = \operatorname{ctg} \pi z$ z biegunami w $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. W ogólności uszeregujmy te bieguny według rosnących wartości ich modułów

$$|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots \leqslant |z_n|, \qquad |z_n| \to \infty. \tag{14.1}$$

W każdym obszarze ograniczonym może być tylko skończona liczba biegunów, gdyż ich punkt skupienia nie jest ani punktem regularnym, ani biegunem.

Otoczmy pierwsze N biegunów $f(z)$ okręgiem C_N o promieniu R i wybierzmy dowolne $z \neq z_n$ wewnątrz okręgu. Wtedy

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z) + \sum_{n=1}^{N} \operatorname{res}\left\{\frac{f(w)}{w-z}\right\}\Bigg|_{w=z_n}. \tag{14.2}$$

Pierwszy składnik sumy po prawej stronie to residuum funkcji podcałkowej w biegunie prostym $w = z$. Całka po lewej stronie dąży do zera dla $R \to \infty$, gdy $f(w) \sim \omega^{-\delta}$ dla $|\omega| \to \infty$. Wtedy otrzymujemy

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res}\left\{\frac{f(w)}{w-z}\right\}\Bigg|_{w=z_n}. \tag{14.3}$$

Jeżeli f ma tylko bieguny proste z residuami $b_1(z_n)$ to zachodzi

$$\operatorname{res}\left\{\frac{f(w)}{w-z}\right\}\Bigg|_{w=z_n} = \lim_{w\to z_n}\left\{(w-z_n)\,\frac{f(w)}{w-z}\right\} = \frac{b_1(z_n)}{z_n-z}. \tag{14.4}$$

i wtedy

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_1(z_n)}{z-z_n}} \tag{14.5}$$

Jeśli założenie o znikaniu całki nie jest prawdziwe to poprawiamy jej zbieżność rozważając drugi punkt $z_0 \neq z_n$, zapisując

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw = f(z_0) + \sum_{n=1}^{N} \operatorname{res}\left\{\frac{f(w)}{w-z_0}\right\}\Bigg|_{w=z_n}. \tag{14.6}$$

Po odjęciu (14.2) i (14.6) stronami, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(z) = f(z_0) \;&+\; \sum_{n=1}^{N}\left[\operatorname{res}\left\{\frac{f(w)}{w-z_0}\right\}\Bigg|_{w=z_n} - \operatorname{res}\left\{\frac{f(w)}{w-z}\right\}\Bigg|_{w=z_n}\right] \\ &+\; \frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_{C_N} \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)}\,dw \end{aligned} \tag{14.7}$$

Jeśli $f(\omega) = \omega^{1-\delta}$ dla $|\omega| \to \infty$ to całka powyżej daży do zera i ostatecznie

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{res}\left\{\frac{f(w)}{w-z_0}\right\}\Bigg|_{w=z_n} - \operatorname{res}\left\{\frac{f(w)}{w-z}\right\}\Bigg|_{w=z_n}\right] \tag{14.8}$$

Jeżeli f ma tylko bieguny proste z residuami $b_1(z_n)$ otrzymujemy stąd następujący rozkład

$$\boxed{f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_1(z_n)\left[\frac{1}{z_n - z_0} + \frac{1}{z - z_n}\right]} \tag{14.9}$$

Jeżeli funkcja $f(z)$ ma biegun dwukrotny w $z = z_n$ to residuum wynosi

$$\begin{aligned} \operatorname{res}\left\{\frac{f(w)}{w-z}\right\}\bigg|_{w=z_n} &= \lim_{w\to z_n}\frac{d}{dw}\left\{(w-z_n)^2\,\frac{f(w)}{w-z}\right\} \\ &= \frac{b_1(z_n)}{z_n - z} - \frac{b_2(z_n)}{(z_n-z)^2}\,, \end{aligned} \tag{14.10}$$

gdzie $b_i(z_n)$ to współczynniki części głównej szeregu Laurenta funkcji f. Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned} f(z) = f(z_0) \; &+ \; \sum_{n=1}^{\infty} b_1(z_n)\left[\frac{1}{z_n - z_0} + \frac{1}{z - z_n}\right] \\ &+ \; \sum_{n=1}^{\infty} b_2(z_n)\left[\frac{-1}{(z_n - z_0)^2} + \frac{1}{(z - z_n)^2}\right]. \end{aligned} \tag{14.11}$$

14.1.1 Przykłady

1. Rozłóżmy w szereg funkcję

$$f(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,, \tag{14.12}$$

która ma bieguny proste w punktach $z_n = n \in \mathbb{Z}$ z residuami $b_1(z_n) = (-1)^n$. Kładąc $z_0 = 0$ musimy wyeliminować biegun w tym punkcie, rozważając funkcję $zf(z)$, dla której $f(0) = 1$. Ze wzoru (14.9) wynika

$$\begin{aligned} \frac{\pi z}{\sin \pi z} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[-\frac{1}{n} + \frac{1}{z+n}\right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right] = 1 + 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2} \end{aligned}$$

Dzieląc przez z otrzymamy szukany rozkład

$$\boxed{\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}} \tag{14.13}$$

2. Rozważmy funkcję

$$f(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z - \frac{1}{z} \tag{14.14}$$

z biegunami prostymi w $z_n = \pm n,\ n \in \mathbb{N}$ i residuami $b_1(z_n) = 1$. Ponadto $f(0) = 0$. Funkcja $f(z)$ jest ograniczona dla $|z| \to \infty$, stosujemy więc rozwinięcie (14.9).

$$\begin{aligned}\pi \operatorname{ctg} \pi z - \frac{1}{z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{z-n}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n} + \frac{1}{z+n}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}\end{aligned}$$

Stąd wzór

$$\boxed{\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}} \tag{14.15}$$

14.2 Rozkład na iloczyn nieskończony

Załóżmy, że funkcja meromorficzna $f(z)$ jest postaci

$$f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}\,, \tag{14.16}$$

gdzie *funkcja całkowita* $g(z)$ ma w punktach $z = z_n,\ n = 1, 2, \ldots$ zera jednokrotne, w których $g'(z_n) \neq 0$. Punkty te są jednocześnie biegunami prostymi funkcji $f(z)$ z residuami równymi 1. Wzór (14.9) przyjmuje wtedy postać

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{g'(z_0)}{g(z_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-z_n} + \frac{1}{z_n-z_0}\right]. \tag{14.17}$$

Całkując obie strony po z w granicach od z_0 do z, otrzymujemy

$$\ln \frac{g(z)}{g(z_0)} = \frac{g'(z_0)}{g(z_0)}(z-z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\ln \frac{z-z_n}{z_0-z_n} + \frac{z-z_0}{z_n-z_0}\right\}. \tag{14.18}$$

Kładąc $z_0 = 0$ otrzymujemy *iloczyn Weierstrassa* dla funkcji całkowitej

$$\boxed{g(z) = g(0) \exp\left\{\frac{g'(0)}{g(0)}\, z\right\} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \mathrm{e}^{z/z_n}} \tag{14.19}$$

Wzór ten jest uogólnieniem na funkcje całkowite rozkładu wielomianu na iloczyn czynników $(z - z_i)$, gdzie z_i to pierwiastki wielomianu.

14.2.1 Przykłady

1. Rozważmy funkcję całkowitą

$$g(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} \tag{14.20}$$

posiadającą zera w $z_n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Wykorzystując warunki $g(0) = 1$ oraz $g'(0) = 0$, znajdujemy

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{z/n} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{-z/n}, \tag{14.21}$$

co prowadzi do wzoru

$$\boxed{\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} \tag{14.22}$$

2. Funkcja całkowita

$$g(z) = \frac{1}{\Gamma(1+z)} \tag{14.23}$$

ma zera jednokrotne dla $z_n = -1, -2, \ldots$. Podstawiając w (14.19) wartość $g(0) = 1$ oraz

$$\frac{g'(0)}{g(0)} = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \gamma = 0.57721566\ldots, \tag{14.24}$$

gdzie γ jest *stałą Eulera-Mascheroniego*, znajdujemy

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(1+z)} = \mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{-z/n}} \tag{14.25}$$

Stąd można natychmiast otrzymać

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{z}{\Gamma(1+z)} = z\,\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{-z/n}. \tag{14.26}$$

Podstawiając $z \to -z$ we wzorze (14.25) otrzymamy

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \mathrm{e}^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{z/n}. \tag{14.27}$$

Mnożąc dwa ostatnie wzory przez siebie znajdujemy znany już wzór

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \tag{14.28}$$

14.3 Funkcja digamma

Digamma $\psi(z)$ to pochodna logarytmu funkcji gamma

$$\boxed{\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}} \tag{14.29}$$

Logarytmując wzór (14.26) znajdujemy

$$\ln\Gamma(z) = -\ln z - \gamma z - \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\ln\left(1+\frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right\}. \tag{14.30}$$

Stąd po policzeniu pochodnej dostaniemy

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right\}. \tag{14.31}$$

Digamma ma bieguny proste w $z=0,-1,-2,\ldots$ z residuum równym -1.

Dla $z=1$ mamy w zgodzie ze wzorem (14.24)

$$\psi(1) = -\gamma - 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+n} - \frac{1}{n}\right\} = -\gamma - 1 + 1 = -\gamma. \tag{14.32}$$

Kolejne wartości dla $n\in\mathbb{N}$ znajdziemy zauważając, że

$$\begin{aligned}\psi(1+z) &= \frac{d}{dz}\ln\Gamma(1+z) = \frac{d}{dz}\ln z\Gamma(z)\\ &= \frac{d}{dz}\ln z + \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \psi(z).\end{aligned} \tag{14.33}$$

Ze wzoru tego wynika

$$\psi(1+z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right\}. \tag{14.34}$$

Podstawiając $z\to -z$ otrzymujemy

$$\psi(1-z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right\}. \tag{14.35}$$

Odejmując stronami mamy

$$\psi(1-z)-\psi(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right\}. \tag{14.36}$$

Porównując z rozwinięciem (14.15) dostajemy

$$\psi(1-z)-\psi(1+z)=\pi\operatorname{ctg}\pi z-\frac{1}{z} \tag{14.37}$$

lub wykorzystując wzór (14.33)

$$\boxed{\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\operatorname{ctg}\pi z} \tag{14.38}$$

14.4 Stała Eulera–Mascheroniego

Podstawiając $z=1$ w (14.30) i pamietając, że $\Gamma(1)=1$ znajdujemy wzór dla stałej Eulera-Mascheroniego

$$\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}. \tag{14.39}$$

Rozważmy $N-$tą sumę częściową ciągu po prawej stronie (14.39)

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{n+1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N+1) \end{aligned} \tag{14.40}$$

Granica tego ciągu jest równa stałej Eulera, więc

$$\gamma=\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N+1)\right\}=\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln N\right\}. \tag{14.41}$$

Stała γ jest więc granicą ciągu różnic $N-$tej liczby harmonicznej i $\ln N$.

Istnieje również związek między stałą Eulera-Mascheroniego a funkcją dzeta Riemanna. Pamiętając o rozwinięciu funkcji logarytmu dla $|z|<1$

$$\ln(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}z^k \tag{14.42}$$

znajdujemy

$$
\begin{aligned}
\gamma \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\frac{1}{n^k}\right\} \\
&=\; -\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\frac{1}{n^k}\right\} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}
\end{aligned}
$$

i stąd ostateczny wynik

$$
\boxed{\gamma = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(k)} \tag{14.43}
$$