# Elektrodynamika

Krzysztof Golec–Biernat

IFJ PAN/Uniwersytet Rzeszowski

(13 czerwca 2023)

Wersja robocza nie do dystrybucji

Kraków
2017/18

# Spis treści


**1 Równania Maxwella** **4**
1.1 Równania Maxwella w materii . . . . . 4
1.2 Polaryzacja i magnetyzacja materii . . . . . 5

**2 Fale elektromagnetyczne w materii nieprzewodzącej** **6**
2.1 Równania falowe . . . . . 6
2.2 Fale płaskie . . . . . 7
2.3 Polaryzacja fali płaskiej . . . . . 8

**3 Optyka geometryczna** **10**
3.1 Warunki na granicy dwóch ośrodków nieprzewodzących . . . . . 10
3.2 Prawa odbicia i załamania . . . . . 12

**4 Polaryzacja w optyce geometrycznej** **15**
4.1 Polaryzacja przy odbiciu i załamaniu . . . . . 15
4.2 Wzory Fresnela dla polaryzacji w płaszczyźnie padania . . . . . 16
4.3 Wzory Fresnela dla polaryzacji prostopadłej do płaszczyzny padania . . . . . 19
4.4 Całkowite wewnętrzne odbicie . . . . . 20
4.5 Natężenie fal przy odbiciu i załamaniu . . . . . 21

**5 Fale elektromagnetyczne w przewodnikach** **22**
5.1 Równania falowe . . . . . 22
5.2 Fale płaskie w przewodniku . . . . . 23
5.3 Relacja dyspersyjna w przewodniku . . . . . 24
5.4 Odbicie od powierzchni przewodzącej . . . . . 26
5.5 Zależność współczynnika załamania od częstości . . . . . 27
5.6 Literatura . . . . . 31

# Rozdział 1

# Równania Maxwella

## 1.1 Równania Maxwella w materii

Równania Maxwella w materii przyjmują postać

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw} \tag{1.1}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{1.2}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{sw} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{1.4}$$

gdzie $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ to wektory natężenia, a $(\mathbf{D}, \mathbf{B})$ to wektory indukcji pola elektrycznego i magnetycznego, natomiast $\rho_{sw}$ i $\mathbf{j}_{sw}$ to gęstość i prąd ładunków swobodnych. Te ostatnie wielkości spełniają **równanie ciągłości**

$$\frac{\partial \rho_{sw}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{sw} \tag{1.5}$$

jako warunek konstystencji dla równań Maxwella. Licząc bowiem pochodną po czasie prawa Gaussa (1.1) i korzystając z prawa Ampera-Maxwella (1.4) dostajemy

$$\frac{\partial \rho_{sw}}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}_{sw}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{sw} \tag{1.6}$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$. Równanie ciągłości wyraża zasadę zachowania ładunku swobodnego, który może się przemieszczać.

Rozważmy dowolną objętość $V$, w której znajduje się ładunek o gęstości $\rho$. Całkując po tej objętości w ustalonej chwili czasu $t$, otrzymujemy całkowity ładunek w tej objętości w chwili $t$

$$Q(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t)\, dV \tag{1.7}$$

Zmiana ładunku w czasie w objętości $V$może być związana jedynie z przepływem ładunku swobodnego, który zmienia lokalną gęstość tego ładunku, tzn.

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\, dV = \int_V \frac{\partial \rho_{sw}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\, dV = -\int_V (\nabla \cdot \mathbf{j}_{sw})\, dV = -\oint_A \mathbf{j}_{sw} \cdot d\mathbf{a} \tag{1.8}$$

gdzie skorzystaliśmy z równania ciągłości dla ładunku swobodnego oraz całkowego twierdzenia Gaussa, by otrzymać ostatnią całkę. Opisuje ona przepływ prądu ładunków swobodnych $\mathbf{j}_{sw}$ przez zamknietą powierzchnię $A$ otaczającą objętość $V$. Tym samym, zmiana ładunku w tej objętości jest równa przepływowi ładunku swobodnego przez granicę rozważanego obszaru. Jest to treść **prawa zachowania ładunku**.

Wektory natężenia $(\mathbf{E},\mathbf{H})$ są związane z wektorami indukcji $(\mathbf{D},\mathbf{B})$ indukcji pól elektrycznych poprzez równania materiałowe. W ośrodku *liniowym* i *jednorodnym* zachodzi

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{1.10}$$

gdzie $\epsilon$ i $\mu$ to współczynniki przenikalności elektrycznej i magnetycznej materii[1]. Stąd równania Maxwella w ośrodkach liniowych i jednorodnych można zapisać jedynie przy pomocy pól $(\mathbf{E},\mathbf{B})$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_{sw}}{\epsilon} \tag{1.11}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{1.12}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.13}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu\mathbf{j}_{sw} + \mu\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.14}$$

## 1.2 Polaryzacja i magnetyzacja materii

Materia może podlegać polaryzacji elektrycznej lub magnetyzacji, które są opisywane wektorami z wektorami polaryzacji $\mathbf{P}$ i magnetyzacji $\mathbf{M}$. Ich związek z natężeniami pól elektromagnetycznych to

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E} \tag{1.15}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H} \tag{1.16}$$

gdzie współczynniki $\chi_e$ to podatność elektryczna, a $\chi_m$ to podatność magnetyczna materii.

Związek $\mathbf{P}$ i $\mathbf{M}$ z polami indukcji elektrycznej i magnetycznej $(\mathbf{D},\mathbf{B})$ to

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{1.17}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{1.18}$$

Umożliwia on otrzymanie związku pomiędzy współczynnikami przenikalności materii, $\epsilon$ i $\mu$, i próżni, $\epsilon_0$ i $\mu_0$,

$$\epsilon = \epsilon_0(1+\chi_e) \tag{1.19}$$

$$\mu = \mu_0(1+\chi_m) \tag{1.20}$$

Pola $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ odgrywają ważną rolę w elektrostatyce i magnetostatyce, gdyż umożliwiają zapis prawa Gaussa (1.1) i Ampera-Maxwella (1.4) przy pomocy ładunków swobodnych.

[1] W próżni $\epsilon = \epsilon_0 = 8.85\cdot10^{-12}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2)$ i $\mu = \mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\,\mathrm{N/A}^2$.

# Rozdział 2

# Fale elektromagnetyczne w materii nieprzewodzącej

## 2.1 Równania falowe

W liniowej i jednorondej materii nieprzewodzącej nie ma swobodnych ładunków i prądów, dlatego kładziemy $\rho_{sw} = 0$ i $\mathbf{j}_{sw} = 0$ w równaniach Maxwella (1.11)–(1.14):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.4}$$

Licząc rotację obu stron prawa Faradaya (2.3) dostajemy po lewej stronie

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} \tag{2.5}$$

gdzie $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$. Przy otrzymaniu ostatniej równości skorzystaliśmy z prawa Gaussa (2.1). Po prawej stronie otrzymujemy

$$\nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{2.6}$$

gdzie skorzystaliśmy z prawa Ampera-Maxwella (2.4) aby dostać ostatnią równość. Przyrównując obie stony znajdujemy równanie falowe dla pola elektrycznego

$$\Delta \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{2.7}$$

Podobnie, licząc rotację obu stron prawa Ampera-Maxwella znajdujemy równanie falowe dla pola magnetycznego

$$\Delta \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

W obu przypadkach prędkość fali wynosi

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{2.9}$$

W próżni otrzymujemy prędkość światła

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \approx 3\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2.10}$$

Stosunek tych prędkości $n$ nazywa się współczynnikiem załamania

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} \tag{2.11}$$

Dla większości substancji poza obszarem rezonansowym $n > 1$ co oznacza, że prędkość światła w takich ośrodkach $v < c$. Więcej na ten temat w Rozdziale 5.5.

Dla substancji niemagnetycznych $\mu \approx \mu_0$ i wtedy

$$n \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \equiv \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1+\chi_e} \tag{2.12}$$

gdzie $\epsilon_r$ nazywa się względną przenikalnością elektryczną ośrodka.

## 2.2 Fale płaskie

Niech rozwiązania równań falowych w ośrodku nieprzewodzącym mają postać fal płaskich

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{2.13}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{2.14}$$

gdzie $\mathbf{E}_0$ i $\mathbf{B}_0$ to stałe amplitudy pól. Podstawiając tą postać do obu równań falowych znajdujemy *relację dyspersyjną*,

$$\omega = v|\mathbf{k}| \tag{2.15}$$

która jest warunkiem na to by fale płaskie były rozwiązaniami równania falowego. Długość fali jest zdefiniowana jako stosunek

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \tag{2.16}$$

Podstawiając fale płaskie do dwóch pierwszych równań Maxwella dostajemy

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = 0 \tag{2.17}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = 0 \tag{2.18}$$

Stąd $\mathbf{E}\perp\mathbf{k}$ i $\mathbf{B}\perp\mathbf{k}$ co oznacza, że fala elektromagnetyczna jest *falą poprzeczną*. Podstawiają natomiast fale płaskie do równania Faradaya otrzymujemy

$$\nabla\times\mathbf{E} = i\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = i\omega\mathbf{B}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.19}$$

i stąd relacja

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mathbf{B} \tag{2.20}$$

która mówi, że $\mathbf{B}\perp\mathbf{E}$ . Dla długości wektorów pól zachodzi

$$|\mathbf{B}|=\frac{1}{v}|\mathbf{E}| \tag{2.21}$$

gdzie skorzystaliśmy z relacji dyspersyjnej. Stąd ostateczna postać rozwiązań

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{2.22}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\omega}(\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0)\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{2.23}$$

przy warunkach $|\mathbf{k}|=\omega/v$ oraz $\mathbf{E}_0\perp\mathbf{k}$. Dla fali płaskiej propagującej się w kierunku osi $\hat{\mathbf{z}}$, gdy $\mathbf{k}=k\hat{\mathbf{z}}$ i pola $\mathbf{E}$ w kierunku osi $\hat{\mathbf{x}}$ otrzymujemy

$$\mathbf{E}(z,t)=E_0\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\,\hat{\mathbf{x}} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{B}(z,t)=\frac{k}{\omega}E_0\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\,\hat{\mathbf{y}}=\frac{1}{v}E_0\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}\,\hat{\mathbf{y}} \tag{2.25}$$

gdzie $E_0$ to zespolona amplituda pola elektrycznego.

## 2.3 Polaryzacja fali płaskiej

Powróćmy do równania

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\quad=\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{2.26}$$

w którym amplituda $\mathbf{E}_0$ jest zespolona i wybierzmy układ współrzędnych tak by wektor $\mathbf{k}$ był skierowany wzdłuż osi $\hat{\mathbf{z}}$. Pole $\mathbf{E}$ ma wtedy dwie niezależne współrzędne w płaszczyźnie $(x,y)$, prostopadłej do osi $\hat{\mathbf{z}}$,

$$E_x(z,t)=E_{0x}\,\mathrm{e}^{i\delta_1}\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}=E_{0x}\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t+\delta_1)} \tag{2.27}$$

$$E_y(z,t)=E_{0y}\,\mathrm{e}^{i\delta_2}\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)}=E_{0y}\,\mathrm{e}^{i(kz-\omega t+\delta_2)} \tag{2.28}$$

gdzie $\delta_1$ i $\delta_2$ to dwie niezależne fazy, a amplitudy $E_{0x}$ i $E_{0y}$ są już rzeczywiste. Biorąc część rzeczywistą składowych pola $\mathbf{E}$, otrzymujemy

$$E_x(z,t)=E_{0x}\cos(kz-\omega t+\delta_1) \tag{2.29}$$

$$E_y(z,t)=E_{0y}\cos(kz-\omega t+\delta_2) \tag{2.30}$$

Zakładając, że $\delta_1=\delta_2$ otrzymujemy **polaryzację liniową** fali elektromagnetycznej, gdyż stosunek składowych pola jest stały, niezależny od czasu i położenia,

$$\frac{E_y(z,t)}{E_x(z,t)}=\frac{E_{0y}}{E_{0x}}\equiv\operatorname{tg}\phi \tag{2.31}$$

Kąt $\phi$ określa *stałe* nachylenie wektora pola $\mathbf{E}(z,t)$ do osi $\hat{\mathbf{x}}$. Dla $\phi=0$ $(E_{0y}=0)$ mamy polaryzację liniową wzdłuż osi $\hat{\mathbf{x}}$, natomiast dla $\phi=\pi/2$ $(E_{0x}=0)$ polaryzację liniową wzdłuż osi $\hat{\mathbf{y}}$.

Zakładając różnicę faz $\delta_1 - \delta_2 = \pi/2$ oraz równość amplitud, $E_{0x} = E_{0y} \equiv E_0$, otrzymujemy **polaryzację kołową prawoskrętną**, gdyż

$$E_x(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \tag{2.32}$$
$$E_y(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t) \tag{2.33}$$

gdzie wybraliśmy $\delta_1 = 0$ i wtedy $\delta_2 = -\pi/2$. Tworząc sumę kwadratów składowych pola otrzymujemy równanie okręgu o promieniu $r = E_0$, po którym porusza się koniec wektora pola $\mathbf{E}$,

$$E_x^2(z,t) + E_y^2(z,t) = E_0^2 \tag{2.34}$$

Podobnie, dla różnicy faz $\delta_2 - \delta_1 = \pi/2$ i takich samych amplitud otrzymujemy **polaryzację kołową lewoskrętną**. Wybierając $\delta_1 = 0$ i $\delta_2 = \pi/2$, dostajemy

$$E_x(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \tag{2.35}$$
$$E_y(z,t) = -E_0 \sin(kz - \omega t) \tag{2.36}$$

Zauważmy, że suma fal o przeciwnych polaryzacjach i takich samych amplitudach daje falę o polaryzacji liniowej wzdłuż osi $\hat{\mathbf{x}}$

$$E_x(z,t) = 2E_0 \cos(kz - \omega t)\,, \qquad E_y(z,t) = 0 \tag{2.37}$$

Dla różnicy faz $\delta_1 - \delta_2 = \pi/2$, ale dowolnych amplitud, otrzymujemy **polaryzację eliptyczną prawoskrętną**, gdyż teraz

$$E_x(z,t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \tag{2.38}$$
$$E_y(z,t) = E_{0y} \sin(kz - \omega t) \tag{2.39}$$

i stąd równanie elipsy dla końca wektora pola $\mathbf{E}$

$$\frac{E_x^2(z,t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(z,t)}{E_{0y}^2} = 1 \tag{2.40}$$

Dla $\delta_2 - \delta_1 = \pi/2$ zmieniamy skrętność tej polaryzacji na lewoskrętną, podobnie jak dla polaryzacji kołowej.

# Rozdział 3

# Optyka geometryczna

## 3.1 Warunki na granicy dwóch ośrodków nieprzewodzących

Rozważmy dwa ośrodki nieprzewodzące o przenikalnościach $(\mu_1, \epsilon_1)$ i $(\mu_2, \epsilon_2)$. Na granicy tych ośrodków pola $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ nie są ciągłe. Aby znaleźć warunki wiążące te pola po obu stronach granicy tych ośrodków zapiszmy równania Maxwella w formie całkowej. Korzystając z prawa Gausa dostajemy dla dwóch pierwszych równań

$$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{sw} \tag{3.1}$$

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \tag{3.2}$$

gdzie $A$ jest dowolną powierzchnią *zamkniętą*, a $Q_{sw}$ jest całkowitym ładunkiem swobodnym ograniczonym tą powierzchnią. Korzystając natomiast z twierdzenia Stokesa dla dwóch pozostałych równań znajdujemy

$$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{3.3}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{sw} + \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \tag{3.4}$$

gdzie $\Gamma$ jest dowolną krzywą *zamkniętą*, a $A$ jest dowolną powierzchnią, której brzegiem jest krzywa $\Gamma$. $I_{sw}$ jest całkowitym prądem przecinającym powierzchnię $A$, natomiast całki po prawej stronie są strumieniami odpowiedniego pola przez tę powierzchnię.

Rozważmy infinitezymalnie cienką powierzchnię Gaussa zawierającą granicę ośrodków, patrz Rysunek 3.1. Z prawa Gaussa dostajemy

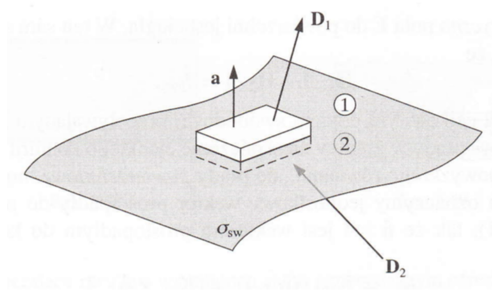
$$\mathbf{D}_1 \cdot \Delta\mathbf{a} - \mathbf{D}_2 \cdot \Delta\mathbf{a} = \sigma_{sw} |\Delta\mathbf{a}| \tag{3.5}$$

gdzie $\Delta\mathbf{a}$ to element powierzchni równoległej do granicy, skierowany od ośrodka 2 do 1, natomiast $\sigma_{sw}$ to powierzchniowa gęstość ładunków swobodnych. Warunek ten oznacza, że składowe pól prostopadłe do powierzchni granicy ośrodków spełniają równanie

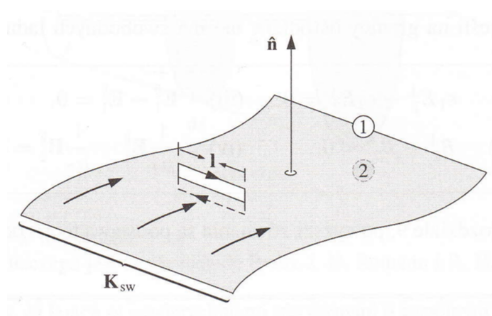
$$D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_{sw} \tag{3.6}$$

Podobnie, z drugiego równania Maxwella otrzymujemy

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \tag{3.7}$$




Rysunek 3.1: Powierzchnia Gaussa na granicy dwóch ośrodków.




Rysunek 3.2: Kontur Ampera na granicy dwóch ośrodków.

Otoczmy teraz granicę ośrodków infinitezymalnie cienką pętlą *prostopadłą* do niej, patrz Rysunek 3.2. Z prawa Faradaya otrzymujemy

$$\mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{3.8}$$

gdzie $\Delta\mathbf{l}$ jest skierowanym elementem długości boku pętli równoległej do powierzchni granicznej, natomiast $A$ jest powierzchnią pętli. Powierzchnia ta znika w granicy inifinitezymalnie cienkiej pętli i stąd warunek na składowe pól równoległe do powierzchni

$$\mathbf{E}_{1\parallel} - \mathbf{E}_{2\parallel} = 0 \tag{3.9}$$

Podobnie, korzystając z prawa Ampera-Maxwella otrzymujemy w granicy infinitezymalnie cienkiej pętli

$$\mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot \Delta\mathbf{l} = I_{sw} \tag{3.10}$$

gdzie $I_{sw}$ jest całkowitym prądem ładunków swobodnych przepływających przez pętlę. Nie znika on w granicy inifnitezymalnie cienkiej pętli, gdyż na powierzchni granicznej mogą wystąpić prądy powierzchniowe $\mathbf{K}_{sw}$ przepływające przez taką pętlę. Jeżeli $\mathbf{n}$ jest wektorem prostopadłym do powierzchni granicznej, skierowanym od powierzchni 2 do 1 to wektor $\mathbf{n} \times \Delta\mathbf{l}$ jest skierowany prostopadle do pętli i wtedy

$$I_{sw} = \mathbf{K}_{sw} \cdot (\mathbf{n} \times \Delta\mathbf{l}) = (\mathbf{K}_{sw} \times \mathbf{n}) \cdot \Delta\mathbf{l} \tag{3.11}$$

Dostajemy więc następujący związek dla składowych pól równoległych do powierzchni

$$\mathbf{H}_{1\|} - \mathbf{H}_{2\|} = \mathbf{K}_{sw} \times \mathbf{n} \tag{3.12}$$

W *liniowch* i *jednorodnych* ośrodkach nieprzewodzących możemy skorzystać z równań materiałowych, wyrażając warunki na granicy dwóch ośrodków przy pomocy pól **E** i **B**

$$\epsilon_1 E_{1\perp} - \epsilon_2 E_{2\perp} = \sigma_{sw} \tag{3.13}$$

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \tag{3.14}$$

$$\mathbf{E}_{1\|} - \mathbf{E}_{2\|} = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_{1\|} - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_{2\|} = \mathbf{K}_{sw} \times \mathbf{n} \tag{3.16}$$

Wzory te można zapisać przy pomocy jednostkowego wektora normalnego do powierzchni $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r})$

$$(\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = \sigma_{sw} \tag{3.17}$$

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3.18}$$

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0 \tag{3.19}$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_1 - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_2\right) \times \mathbf{n} = \mathbf{K}_{sw} \times \mathbf{n} \tag{3.20}$$

Przy braku swobodnych ładunków i prądów powierzchniowych należy podstawić po prawej stronie $\sigma_{sw} = 0$ i $\mathbf{K}_{sw} = 0$.

## 3.2 Prawa odbicia i załamania

Niech na granice dwóch ośrodków, będącą płaszczyzną $z = 0$, pada fala płaska pod kątem $\theta_I$ względem normalnej do płaszczyzny granicznej. Ulega ona odbiciu pod kątem $\theta_R$ oraz wnikaniu do drugiego ośrodka pod kątem $\theta_T$. Odpowiednie wektory falowe są pokazane na Rysunku 3.3. Trzy fale, podająca, odbita i załamana, są falami płaskimi o wektorach falowych $\mathbf{k}_I, \mathbf{k}_R$ i $\mathbf{k}_T$, odpowiednio.

Wektor falowy $\mathbf{k}_I$ znajduje się w płaszczyźnie rysunku. Dwa pozostałe też leżą w tej płaszczyźnie, co można pokazać wykorzystując warunki graniczne z $\sigma_{sw} = 0$ i $\mathbf{K}_{sw} = 0$, zapisane dla trzech analizowanych fal w płaszczyźnie $z = 0$,

$$(\epsilon_1(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R) - \epsilon_2 \mathbf{E}_T) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3.21}$$

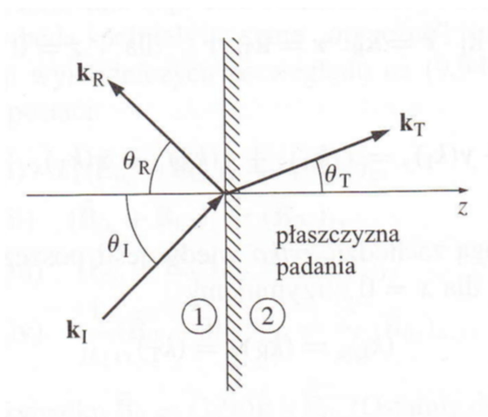
$$(\mathbf{B}_I + \mathbf{B}_R - \mathbf{B}_T) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3.22}$$

$$(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R - \mathbf{E}_T) \times \mathbf{n} = 0 \tag{3.23}$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1}(\mathbf{B}_I + \mathbf{B}_R) - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_T\right) \times \mathbf{n} = 0 \tag{3.24}$$

Wykorzystując związek dla pól

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v}(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \tag{3.25}$$




Rysunek 3.3: Padanie ukośne.

gdzie $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ jest wektorem jednostkowym, dostajemy ostateczną formę warunków brzegowych

$$(\epsilon_1(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R) - \epsilon_2 \mathbf{E}_T) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3.26}$$

$$\left( \frac{1}{v_1}(\hat{\mathbf{k}}_I \times \mathbf{E}_I + \hat{\mathbf{k}}_R \times \mathbf{E}_R) - \frac{1}{v_2}(\hat{\mathbf{k}}_T \times \mathbf{E}_T) \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3.27}$$

$$(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R - \mathbf{E}_T) \times \mathbf{n} = 0 \tag{3.28}$$

$$\left( \frac{1}{\mu_1 v_1}(\hat{\mathbf{k}}_I \times \mathbf{E}_I + \hat{\mathbf{k}}_R \times \mathbf{E}_R) - \frac{1}{\mu_2 v_2}(\hat{\mathbf{k}}_T \times \mathbf{E}_T) \right) \times \mathbf{n} = 0 \tag{3.29}$$

Każdy z tych warunków ma dla fal płaskich następującą postać

$$(\ldots) \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + (\ldots) \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - (\ldots) \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = 0 \tag{3.30}$$

gdzie $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ jest dowolnym wektorem w płaszczyźnie granicznej $z = 0$. Warunki te można spełnić jedynie, gdy

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} \qquad \text{oraz} \qquad z = 0 \tag{3.31}$$

co oznacza, że dla składowych wektorów falowych zachodzi

$$k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx} \tag{3.32}$$

$$k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty} \tag{3.33}$$

Wybierając osie układu współrzędnych tak by $k_{Iy} = 0$ otrzymujemy

$$k_{Ry} = k_{Ty} = 0 \tag{3.34}$$

i trzy wektory falowe leżą w płaszczyźnie $(xz)$ Rysunku 3.3. Stąd pierwsze prawo *optyki geometrycznej.*

- **Pierwsze prawo:** Wektory falowe fali padającej, odbitej i przechodzącej leżą w jednej płaszczyźnie (zwanej *płaszczyzną padania*), wyznaczonej przez wektor normalny do płaszczyzny granicznej i wektor falowy $\mathbf{k}_I$.

Trzy fale mają tą samą częstość $\omega$. Stąd z relacji dyspersyjnej

$$|\mathbf{k}_I|v_1 = |\mathbf{k}_R|v_1 = |\mathbf{k}_T|v_2 = \omega \tag{3.35}$$

gdzie $v_1$ i $v_2$ to prędkości fal odpowiednio w ośrodku 1 i 2 ośrodkach. Stąd

$$|\mathbf{k}_I| = |\mathbf{k}_R| = \frac{v_2}{v_1}|\mathbf{k}_T| \tag{3.36}$$

Warunek równości składowych $x$-owych wektorów falowych prowadzą do następujących wniosków

$$k_{Ix} = k_{Rx} \qquad => \qquad |\mathbf{k}_I|\sin\theta_I = |\mathbf{k}_R|\sin\theta_R \qquad => \qquad \theta_I = \theta_R \tag{3.37}$$

oraz

$$k_{Ix} = k_{Tx} \qquad => \qquad |\mathbf{k}_I|\sin\theta_I = |\mathbf{k}_T|\sin\theta_T \qquad => \qquad \frac{\sin\theta_T}{\sin\theta_I} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \tag{3.38}$$

gdzie $n_1$ i $n_2$ to współczynniki załamania ośrodków. Stąd dwa następne prawa *optyki geometrycznej.*

- **Drugie prawo:** Kąt padania równa się kątowi odbicia: $\theta_I = \theta_R$
- **Trzecie prawo:** Kąt padania i załamania spełniają związek (*prawo Snella*)

$$n_1\sin\theta_I = n_2\sin\theta_T \tag{3.39}$$

Zauważmy, że dla padania prostopadłego, $\theta_I = 0$, mamy również $\theta_R = \theta_T = 0$. Fala odbita porusza się kierunku przeciwnym niż padająca, natomiast fala przechodząca nie ulega odchyleniu.

# Rozdział 4

# Polaryzacja w optyce geometrycznej

## 4.1 Polaryzacja przy odbiciu i załamaniu

Załóżmy, że fala padająca jest spolaryzowana w płaszczyźnie Rysunku 4.1, co oznacza, że wektor $\mathbf{E}^I$ leży w płaszczyźnie $(x,z)$. Wtedy

$$(\hat{\mathbf{k}}_I \times \mathbf{E}_I) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{4.1}$$

Z drugiego warunku brzegowego (3.27) otrzymujemy dla $z = 0$

$$\left( \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_I \times \mathbf{E}_I + \hat{\mathbf{k}}_R \times \mathbf{E}_R) - \frac{1}{v_2} (\hat{\mathbf{k}}_T \times \mathbf{E}_T) \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{4.2}$$

co daje

$$\frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_R \times \mathbf{E}_R) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{v_2} (\hat{\mathbf{k}}_T \times \mathbf{E}_T) \cdot \mathbf{n} \tag{4.3}$$

Warunek ten może być spełniony przez niezależne wektory $\mathbf{E}_R$ i $\mathbf{E}_T$ jedynie gdy obie strony relacji sa równe zeru. Tym samym wektory te leżą w płaszczyźnie $(x,z)$. Ich orientacja jest konwencją. Wybieramy ją jak na Rysunku 4.1.

Podobnie dla polaryzacji fali padającej prostopadłej do płaszczyny padania $(x,z)$ mamy

$$\mathbf{E}_I \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{4.4}$$

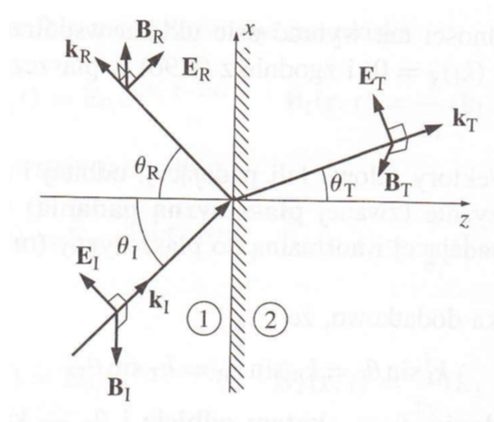
Z pierwszego warunku brzegowego (3.26) otrzymujemy dla $z = 0$

$$(\epsilon_1(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R) - \epsilon_2 \mathbf{E}_T) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{4.5}$$

co daje

$$\epsilon_1(\mathbf{E}_R \cdot \mathbf{n}) = \epsilon_2(\mathbf{E}_T \cdot \mathbf{n}) \tag{4.6}$$

Warunek ten może być spełniony przez niezależne wektory $\mathbf{E}_R$ i $\mathbf{E}_T$ jedynie, gdy obie strony relacji są równe zeru. Tym samym wektory te są prostopadłe do płaszczyzny $(x,z)$. Ich orientacja jest konwencją. Wybieramy ją tak by była taka sama jak dla fali padającej.




Rysunek 4.1: Polaryzacja płaszczyźnie padania w przy odbiciu i załamaniu. Zwrot wektora $\mathbf{E}^R$ jest konwencją, dla której wektor $\mathbf{B}^R$ jest skierowany za płaszczyznę padania natomiast $\mathbf{B}^I$ i $\mathbf{B}^T$ w stronę patrzącego. Wektor normalny $\mathbf{n}$ do powierzchni $z = 0$ jest skierowany w kierunku ośrodka 2.

## 4.2 Wzory Fresnela dla polaryzacji w płaszczyźnie padania

Dla polaryzacji **w płaszczyźnie padania**, drugi warunek brzegowy jest automatycznie spełniony, natomiast pozostałe prowadzą do następujących relacji przy wykorzystaniu warunku $\theta_I = \theta_R$ oraz wektorze normalnym $\mathbf{n}$ skierowanym w stronę ośrodka 2, patrz Rysunek 4.1,

$$(\epsilon_1(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R) - \epsilon_2 \mathbf{E}_T) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad => \quad \epsilon_1(-E_0^I + E_0^R)\sin\theta_I = -\epsilon_2 E_0^T \sin\theta_T \tag{4.7}$$

$$(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R - \mathbf{E}_T) \times \mathbf{n} = 0 \quad => \quad (E_0^I + E_0^R)\cos\theta_I = E_0^T \cos\theta_T \tag{4.8}$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1 v_1}(\hat{\mathbf{k}}_I \times \mathbf{E}_I + \hat{\mathbf{k}}_R \times \mathbf{E}_R) - \frac{1}{\mu_2 v_2}(\hat{\mathbf{k}}_T \times \mathbf{E}_T)\right) \times \mathbf{n} = 0 \quad => \quad \frac{1}{\mu_1 v_1}(E_0^I - E_0^R) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_0^T \tag{4.9}$$

Pierwsze równanie przyjmuje postać

$$E_0^I - E_0^R = \frac{\epsilon_2 \sin\theta_T}{\epsilon_1 \sin\theta_I} E_0^T \tag{4.10}$$

natomiast trzecie to

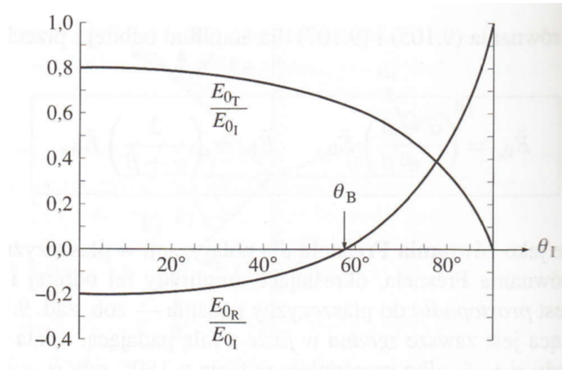
$$E_0^I - E_0^R = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} E_0^T \tag{4.11}$$

Stąd relacja wynikająca z równości prawych stron

$$\frac{\epsilon_2 \sin\theta_T}{\epsilon_1 \sin\theta_I} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \tag{4.12}$$

Jest to relacja równoważna prawu Snella (3.39), gdyż definicji prędkości fali $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ oraz współczynnika załamana $n = c/v$, dostajemy

$$n_2 \sin\theta_T = n_1 \sin\theta_I \tag{4.13}$$




Rysunek 4.2: Stosunek amplitud fali odbitej $R$ i przechodzącej $T$ do amplitudy fali padającej $I$ dla światła padającego z powietrza ($n_1 = 1$) na szkło ($n_2 = 1.5$) przy polaryzacji w płaszczyźnie padania.

Drugie równanie można zapisać w formie

$$E_0^I + E_0^R = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} E_0^T \tag{4.14}$$

Zapiszmy równania (4.14) oraz (4.11) w postaci

$$E_0^I + E_0^R = \alpha E_0^T \tag{4.15}$$

$$E_0^I - E_0^R = \beta E_0^T \tag{4.16}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}, \qquad \beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \tag{4.17}$$

Stąd otrzymujemy *równania Fresnela* w postaci

$$E_0^R = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_0^I \tag{4.18}$$

$$E_0^T = \frac{2}{\alpha + \beta} E_0^I \tag{4.19}$$

Zauważmy, że fala przechodząca $T$ jest zawsze zgodna w fazie z falą padającą, natomiast fala odbita $R$ jest zgodna w fazie z fala padającą gdy $\alpha > \beta$, natomiast dla $\alpha < \beta$ ma fazę przesuniętą o 180°.

Dla ośrodków niemagnetycznych $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ i wtedy

$$\beta = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{4.20}$$

Stąd równania Fresnela dla ośrodków niemagnetycznych

$$E_0^R = \frac{n_1\cos\theta_T - n_2\cos\theta_I}{n_1\cos\theta_T + n_2\cos\theta_I} E_0^I \tag{4.21}$$

$$E_0^T = \frac{2n_1\cos\theta_I}{n_1\cos\theta_T + n_2\cos\theta_I} E_0^I \tag{4.22}$$

gdzie $\cos\theta_T$ można wyrazić przez kąt padania $\theta_I$ na podstawie prawa Snella (4.13)

$$\cos\theta_T = \sqrt{1-\sin^2\theta_T} = \sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_I} \tag{4.23}$$

- Dla *padania prostopadłego*, $\theta_I = \theta_T = 0$, otrzymujemy

$$E_0^R = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}E_0^I \ < \ 0\,, \qquad\qquad E_0^T = \frac{2n_1}{n_1+n_2}E_0^I \ < \ E_0^I \tag{4.24}$$

  Fala odbita $R$ ma zawsze fazę przesuniętą o 180° w stosunku do fali padającej.

- Natomiast dla *padania stycznego* do granicy ośrodków, $\theta_I = 90°$, mamy

$$E_0^R = E_0^I\,, \qquad\qquad E_0^T = 0 \tag{4.25}$$

  Promień padający, równy promieniu odbitemu $R$, ślizga się wzdłuż powierzchni granicznej.

- Interesujący jest też przypadek, gdy *fala odbita jest całkowicie stłumiona* ($\alpha = \beta$)

$$E_0^R = 0\,, \qquad\qquad E_0^T = \frac{n_1}{n_2}E_0^I \tag{4.26}$$

  Zachodzi to przy kącie padania $\theta_I = \theta_B$, zwanego *kątem Brewstera*, który spełnia równanie

$$n_1\cos\theta_T = n_2\cos\theta_B \tag{4.27}$$

  z którego wynika warunek

$$\operatorname{tg}\theta_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{4.28}$$

  Kąt Brewstera istnieje więc niezależnie od relacji pomiędzy współczynnikami załamania. Dla $n_1 < n_2$ mamy $\theta_B > 45°$, natomiast dla $n_1 > n_2$ otrzymujemy $\theta_B < 45°$. Łatwo pokazać, że dla kąta padania równego kątowi Brewstera, kąt pomiędzy promieniem odbitym i przechodzącym wynosi 90°. Jeżeli bowiem znajdziemy taki kąt padania $\theta_I$, że zachodzi ta własność to

$$\theta_I + \theta_T = 90° \tag{4.29}$$

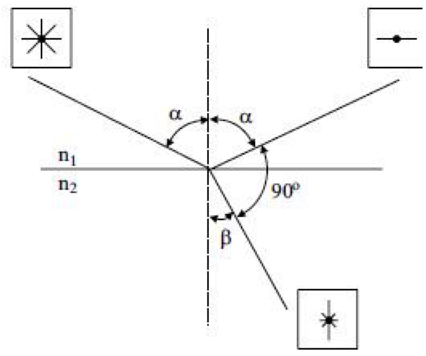
  Z prawa Snella natomiast znajdujemy

$$n_1\sin\theta_I = n_2\sin(90° - \theta_I) = n_2\cos\theta_I \tag{4.30}$$

  skąd otrzymujemy warunek dla kąta Brewstera

$$\operatorname{tg}\theta_I = \frac{n_2}{n_1} \tag{4.31}$$

Trzy omówione przypadki szczególne są widoczne na Rysunku 4.2, gdzie pokazane są stosunki amplitud $E_{0R}/E_{0I}$ dla fali odbitej i $E_{0T}/E_{0I}$ dla fali przechodzącej.




Rysunek 4.3: Polaryzacja fali odbitej przy kącie Brewstera $\theta_B = \alpha$, prostopadła do płaszczyzny padania, przy niespolaryzowanej fali padającej.

## 4.3 Wzory Fresnela dla polaryzacji prostopadłej do płaszczyzny padania

Dla polaryzacji **prostopadłej do płaszczyzny padania** wykorzystaliśmy pierwszy warunek, natomiast pozostałe prowadzą do równań, patrz Rysunek 4.1,

$$\left(\frac{1}{v_1}(\hat{\mathbf{k}}_I \times \mathbf{E}_I + \hat{\mathbf{k}}_R \times \mathbf{E}_R) - \frac{1}{v_2}(\hat{\mathbf{k}}_T \times \mathbf{E}_T)\right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad => \quad \frac{1}{v_1}(E_0^I + E_0^R)\sin\theta_I = \frac{1}{v_2}E_0^T \sin\theta_T \tag{4.32}$$

$$(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R - \mathbf{E}_T) \times \mathbf{n} = 0 \quad => \quad E_0^I + E_0^R = E_0^T \tag{4.33}$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1 v_1}(\hat{\mathbf{k}}_I \times \mathbf{E}_I + \hat{\mathbf{k}}_R \times \mathbf{E}_R) - \frac{1}{\mu_2 v_2}(\hat{\mathbf{k}}_T \times \mathbf{E}_T)\right) \times \mathbf{n} = 0 \quad => \quad \frac{1}{\mu_1 v_1}(E_0^I - E_0^R)\cos\theta_I = \frac{1}{\mu_2 v_2}E_0^T \cos\theta_T \tag{4.34}$$

Stąd równania

$$E_0^I + E_0^R = \frac{v_1 \sin\theta_T}{v_2 \sin\theta_I} E_0^T = E_0^T \tag{4.35}$$

$$E_0^I + E_0^R = E_0^T \tag{4.36}$$

$$E_0^I - E_0^R = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}\frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} E_0^T = \alpha\beta E_0^T \tag{4.37}$$

gdzie w pierwszym równaniu skorzystaliśmy z prawa Snella oraz

$$\alpha = \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I}, \qquad \beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \tag{4.38}$$

Rozwiązując je otrzymujemy

$$E_0^R = \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta} E_0^T \tag{4.39}$$

$$E_0^T = \frac{2}{1+\alpha\beta} E_0^I \tag{4.40}$$

Dla materiałów niemagnetycznych, $\beta = n_2/n_1$, i wtedy

$$E_0^R = \frac{n_1\cos\theta_I - n_2\cos\theta_T}{n_1\cos\theta_I + n_2\cos\theta_T}\,E_0^I \tag{4.41}$$

$$E_0^T = \frac{2n_1\cos\theta_I}{n_1\cos\theta_I + n_2\cos\theta_T}\,E_0^I \tag{4.42}$$

Dla padania prostopadłego, $\theta_I = \theta_T = 0$, otrzymujemy znane już wzory

$$E_0^R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\,E_0^I, \qquad\qquad E_0^T = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}\,E_0^I \tag{4.43}$$

Zauważmy, że w przeciwieństwie do polaryzacji w płaszczyźnie padania, fala odbita $R$ nigdy się nie zeruje. Gdyby tak było to spełniony byłby związek

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \quad => \quad \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} = \frac{n_1\mu_2}{n_2\mu_1} \quad => \quad 1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_I = \frac{n_1^2\mu_2^2}{n_2^2\mu_1^2}\cos^2\theta_I \tag{4.44}$$

co jest prawdą jedynie w przypadku $n_1 = n_2$ oraz $\mu_1 = \mu_2$, który wykluczamy, gdyż oznacza on rozważenie tylko jednego ośrodka.

Wynik ten oznacza, że w przypadku niespolaryzowanej fali padającej, składowa polaryzacji w płaszczyźnie padania ulega wygaszeniu dla kąta padania Brewstera, natomiast składowa prostopadła do tej płaszczyzny jest różna od zera. *Fala odbita jest więc spolaryzowana* w kierunku równoległym do powierzchni granicznej, patrz Rysunek 4.3.

## 4.4 Całkowite wewnętrzne odbicie

Z prawa Snella (3.39) otrzymujemy

$$\cos^2\theta_T = 1 - \sin^2\theta_T = 1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_I \tag{4.45}$$

Dla $n_1 < n_2$ wyrażenie po prawej stronie jest zawsze dodatnie. Możemy wtedy wyciągnąć pierwiastek, otrzymując

$$\cos\theta_T = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_I} \tag{4.46}$$

Kąt padania $\theta_I$ może się wtedy zmieniać w przedziale $\theta_I \in [0, 90°]$.

Dla $n_1 > n_2$, gdy fala elektromagnetyczna pada z ośrodka gęstszego optycznie, istnieje maksymalny kąt padania $\theta_{Imax}$, który zeruje wyrażenie podpierwiastkowe,

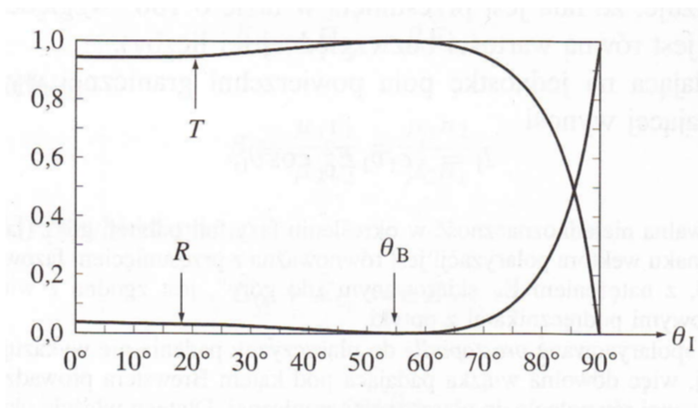
$$\sin\theta_{Imax} = \frac{n_2}{n_1} < 1 \tag{4.47}$$

Dla takiego $\theta_{Imax}$ kąt $\theta_T = 90°$, co oznacza, że promień przechodzący ślizga się po powierzchni.

Dla kątów $\theta_I > \theta_{Imax}$ istnieje tylko promień odbity - następuje *całkowite wewnętrzne odbicie*. Kąt Brewstera w tym przypadku jest mniejszy niż $\theta_{Imax}$, gdyż z warunku

$$\mathrm{tg}\,\theta_B = \sin\theta_{Imax} = \frac{n_2}{n_1} < 1 \tag{4.48}$$

wynika, że $\theta_B < \theta_I^{max}$. Jak więc należało oczekiwać, przy wygaszeniu fali odbitej dla kąta Brewstera wciąż istnieje fala przechodząca.




Rysunek 4.4: Współczynniki odbicia R i przejścia T dla światła padającego z powietrza ($n_1 = 1$) na szkło ($n_2 = 1.5$) przy polaryzacji w płaszczyźnie padania.

## 4.5 Natężenie fal przy odbiciu i załamaniu

Uśrednione po czasie natężenie fali padającej na jednostkę pola powierzchni granicznej wynosi $I = \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}}$, gdzie

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \tag{4.49}$$

jest wektorem Poyntinga fali elektromagnetycznej. Stąd natężenie padającej fali płaskiej

$$I_I = \frac{1}{2}\epsilon_1 v_1 (E_0^I)^2 \cos\theta_I \tag{4.50}$$

natomiast natężenia fali odbitej i przechodzącej w *przypadku polaryzacji w płaszczyźnie* padania to

$$I_R = \frac{1}{2}\epsilon_1 v_1 (E_0^R)^2 \cos\theta_I \tag{4.51}$$

$$I_T = \frac{1}{2}\epsilon_2 v_2 (E_0^T)^2 \cos\theta_T \tag{4.52}$$

Zdefinujmy współczynnik odbicia $R$ i przejścia $T$ fal spolaryzowanych równolegle do płaszczyzny padania,

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left(\frac{E_0^R}{E_0^I}\right)^2 = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \tag{4.53}$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1}\left(\frac{E_0^R}{E_0^I}\right)^2 \frac{\cos\theta_T}{\cos\theta_I} = \alpha\beta\left(\frac{2}{\alpha+\beta}\right)^2 \tag{4.54}$$

Dla fal spolaryzowanych prostopadle do płaszczyzny padania, otrzymujemy

$$R = \left(\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\right)^2, \qquad `T = \alpha\beta\left(\frac{2}{1+\alpha\beta}\right)^2 \tag{4.55}$$

Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach

$$R + T = 1 \tag{4.56}$$

Wykres współczynników $R$ i $T$ dla światła spolaryzowanego w płaszczyźnie padania, padającego na szkło z powietrza, jest przedstawiony na Rysunku 4.4.

# Rozdział 5

# Fale elektromagnetyczne w przewodnikach

## 5.1 Równania falowe

W przewodnikach nie kontrolujemy niezależnie przepływu ładunków i dlatego nie możemy położyć gęstości ładunków swobodnych $\rho_{sw} = 0$ oraz gęstości prądu $\mathbf{j}_{sw} = 0$ w równaniach Maxwella (1.11)–(1.14) dla liniowej jednorodnej materii:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{sw}}{\epsilon} \tag{5.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}_{sw} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{5.4}$$

W ośrodkach *liniowych* i *jednorodnych* obowiązuje prawo Ohma w postaci

$$\mathbf{j}_{sw} = \sigma \mathbf{E} \tag{5.5}$$

gdzie $\sigma$ to przewodność ośrodka. Z równania ciagłości dla ładunków swobodnych i prawa Gaussa otrzymujemy

$$\frac{\partial \rho_{sw}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{sw} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_{sw} \tag{5.6}$$

Stąd zachowanie czasowe gęstości ładunków swobodnych

$$\rho_{sw} = \rho_0 \, \mathrm{e}^{-t/\tau}\,, \tag{5.7}$$

gdzie wprowadziliśmy czas relaksacji

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \tag{5.8}$$

Dla $t \gg \tau$ mamy $\rho_{sw} \to 0$ i wtedy równania Maxwella przyjmują postać

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{5.9}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5.10}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma \mathbf{E} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{5.12}$$

Będą one podstawą analizy propagacji fal elektromagnetycznych w przewodnikach dla czasów $t \gg \tau$.

Licząc rotację obu stron prawa Faradaya (5.11), otrzymujemy dla lewej strony po wykorzystaniu prawa Gaussa (5.9):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} \tag{5.13}$$

oraz dla prawej strony po wykorzystaniu prawa Ampera (5.12):

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{5.14}$$

Stąd równanie falowe dla pola elektrycznego

$$\Delta \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{5.15}$$

Powtarzając to rozumowanie dla pola magnetycznego poprzez policzenie rotacji obu stron prawa Ampera dostajemy identyczne równanie

$$\Delta \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.16}$$

W obu przypadkach równanie falowe zostało uzupełnione o człon z pierwszą pochodną czasową z dodatnim znakiem. Powoduje to występowanie tłumienia propagacji fal elektromagnetycznych w przewodniku.

## 5.2 Fale płaskie w przewodniku

Rozważmy rozwiązanie w formie fal płaskich ze *stałymi zespolonymi* amplitudami, propagujące się wzdłuż osi $\hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 \, \mathrm{e}^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \tag{5.17}$$

$$\mathbf{B}(z,t) = \mathbf{B}_0 \, \mathrm{e}^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \tag{5.18}$$

Z praw Gaussa wynika, że $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ są prostopadłe do osi $\hat{\mathbf{z}}$,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = E_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mathrm{e}^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \right) = 0 \qquad => \qquad E_{0z} = 0 \tag{5.19}$$

i podobnie dla pola magnetycznego $B_{0z} = 0$. Stąd otrzymujemy falę *poprzeczną* tak jak w przypadku swobodnym. Oba pola są także do siebie *prostopadłe*, gdyż z prawa Faradaya dostajemy

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \mathbf{E}_x & \mathbf{E}_y & 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{x}}\,(-\partial_z \mathbf{E}_y) + \hat{\mathbf{y}}\,(\partial_z \mathbf{E}_x) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \hat{\mathbf{x}}\,(-\partial_t \mathbf{B}_x) + \hat{\mathbf{y}}\,(-\partial_t \mathbf{B}_y) \tag{5.20}$$

gdzie $\partial_x = \partial / \partial_x$ *etc.*. Stąd relacje

$$\partial_z \mathbf{E}_y = \partial_t \mathbf{B}_x \qquad => \qquad i\tilde{k}\mathbf{E}_y = -i\omega \mathbf{B}_x \tag{5.21}$$

$$\partial_z \mathbf{E}_x = -\partial_t \mathbf{B}_y \qquad => \qquad i\tilde{k}\mathbf{E}_x = i\omega \mathbf{B}_y \tag{5.22}$$

Dzieląc oba równania stronami otrzymujemy

$$\frac{\mathbf{E}_y}{\mathbf{E}_x} = -\frac{\mathbf{B}_x}{\mathbf{B}_y} \qquad => \qquad \mathbf{E}_x\mathbf{B}_x + \mathbf{E}_y\mathbf{B}_y = 0 \tag{5.23}$$

co oznacza, że

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{B}\,. \tag{5.24}$$

Zakładając polaryzację pola $\mathbf{E}$ wzdłuż osi $\hat{\mathbf{x}}$, dostajemy pole $\mathbf{B}$ skierowane wzdłuż osi $\hat{\mathbf{y}}$ oraz związek dla amplitud pól

$$B_0 = \frac{\tilde{k}}{\omega}\; E_0 \tag{5.25}$$

Stąd postać fal płaskich w takim przypadku

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0\, \mathrm{e}^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\,\hat{\mathbf{x}} \tag{5.26}$$

$$\mathbf{B}(z,t) = \frac{\tilde{k}}{\omega}\, E_0\, \mathrm{e}^{i(\tilde{k}z-\omega t)}\,\hat{\mathbf{y}} \tag{5.27}$$

## 5.3 Relacja dyspersyjna w przewodniku

Podstawiając postulowaną formę fal płaskich (5.26)–(5.27) do równań falowych (5.15)–(5.16) dostajemy związek pomiędzy $\tilde{k}$ a $\omega$:

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega \tag{5.28}$$

z którego wynika, że $\tilde{k}$ jest więc wielkością zespoloną

$$\tilde{k} = k + i\kappa = |\tilde{k}|\,\mathrm{e}^{i\phi} \tag{5.29}$$

Podnosząc $\tilde{k}$ do kwadratu, dostajemy równania na poszukiwaną część rzeczywistą i urojoną $\tilde{k}$

$$k^2 - \kappa^2 = \mu\epsilon\omega^2\,, \qquad\qquad 2k\kappa = \mu\sigma\omega \tag{5.30}$$

skąd znajdujemy

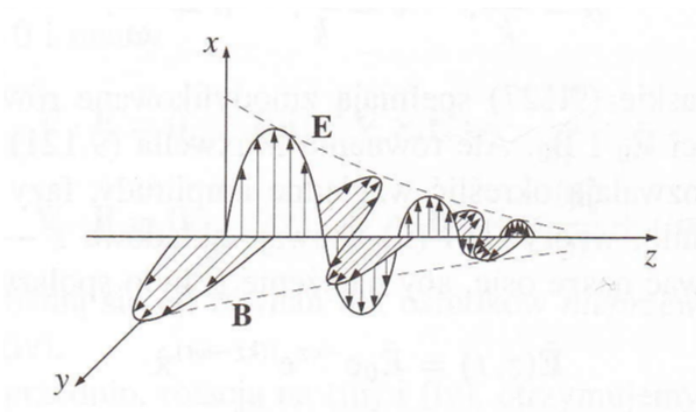
$$k = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}+1\right]^{1/2} \tag{5.31}$$

$$\kappa = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2} \tag{5.32}$$

oraz

$$|\tilde{k}| = \sqrt{k^2+\kappa^2} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}\right]^{1/2} \tag{5.33}$$

$$\phi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\kappa}{k} = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2}-1}{\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\epsilon\omega})^2}+1}\right]^{1/2} \tag{5.34}$$




Rysunek 5.1: Propagacja fali płaskiej w przewodniku.

Zauważmy, że powyższe wielkości są funkcjami częstości fali $\omega$, tzn.

$$\tilde{k} = \tilde{k}(\omega) = k(\omega) + i\kappa(\omega) \tag{5.35}$$

Ostateczna postać fal płaskich w przewodniku spolaryzowanych liniowo w kierunku $\hat{\mathbf{x}}$ to

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \, \mathrm{e}^{-\kappa(\omega) z} \, \mathrm{e}^{i(k(\omega) z - \omega t)} \, \hat{\mathbf{x}} \tag{5.36}$$

$$\mathbf{B}(z,t) = \frac{|\tilde{k}(\omega)|}{\omega} \, E_0 \, \mathrm{e}^{-\kappa(\omega) z} \, \mathrm{e}^{i(k(\omega) z - \omega t + \phi)} \, \hat{\mathbf{y}} \tag{5.37}$$

gdzie dla uproszczenia zakładamy, że amplituda $E_0$ jest rzeczywista.

Oba pola ulegają eksponencjalnemu tłumieniu z rosnącym $z > 0$, którego siła jest determinowane przez *część urojoną* $\kappa$ zespolonego wektora falowego $\tilde{k}$. Wielkość $1/\kappa$, nazywana się głębokością wnikania, charakteryzuje odległość, na którą wnikają fale do przewodnika. *Część rzeczywista* $k$ określa w zwykły sposób długość fali, prędkość fazową fali i współczynnik załamania

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \qquad v = \frac{\omega}{k}, \qquad n = \frac{c}{v} \tag{5.38}$$

gdzie $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Pole magnetyczne *opóźnia się* względem pola elektrycznego o fazę $\phi$ - przewodnik wprowadza więc tłumienie fali elektromagnetycznej i opóźnienie fazowe pola magnetycznego, patrz Rysunek 5.1.

Zapiszmy część rzeczywistą i urojoną $\tilde{k}$ przy pomocy czasu relaksacji gęstości ładunków w przewodniku $\tau = \epsilon/\sigma$:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} + 1 \right]^{1/2} \tag{5.39}$$

$$\kappa = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} - 1 \right]^{1/2} \tag{5.40}$$

Dla $\omega\tau \gg 1$, tzn. dla bardzo wysokich częstości w skali $1/\tau$, lub bardzo dużego czasu relaksacji w skali $1/\omega$ (słaby przewodnik) dostajemy

$$k \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon}, \qquad \kappa \approx \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{2\tau} \tag{5.41}$$

Fala elektromagnetyczna propaguje się więc z prędkością $v \approx c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$, natomiast głębokość wnikania $1/\kappa \approx 2c\tau$ nie zależy od częstości i jest bardzo duża w skali określonej przez długość fali, gdyż zachodzi

$$2c\tau \gg \frac{2c}{\omega} \approx \frac{\lambda}{\pi}. \tag{5.42}$$

Pamiętajmy, ze rozpatrujemy czasy $t \gg \tau$, gdy możemy już zaniedbać gęstość ładunku swobodnego w przewodniku.

Dla czystej wody $\sigma = 4.4. \cdot 10^{-6}\,(\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$, natomiast $\epsilon = 80\,\epsilon_0$ i $\mu \approx \mu_0$. Czas relaksacji $\tau = 1.6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$ i dla fal radiowych UKF, $\omega = 10^8\,\mathrm{s}^{-1}$, mamy $\omega\tau \sim 10^4 \gg 1$. Głębokość wnikania $1/\kappa = 2c\tau \approx 10^4\,\mathrm{m}$ jest bardzo duża i *fala UKF propaguje się w wodzie bez silnego tłumienia na odległości rzędu 10 kilometrów.* Podobny efekt zachodzi dla fal o wyższych częstościach.

Dla $\omega\tau \ll 1$, tzn. dla niskich częstości w skali $1/\tau$, lub krótkiego czasu relaksacji w skali $1/\omega$ (doskonały przewodnik), otrzymujemy

$$k \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon\omega}{2\tau}}, \qquad \kappa \approx \sqrt{\frac{\mu\epsilon\omega}{2\tau}} \tag{5.43}$$

Fala w takim przypadku ma prędkość $v \approx c\sqrt{2\omega\tau} \ll c$, natomiast głębokość wnikania jest rzędu długości fali, gdyż $1/\kappa \approx 1/k = \lambda/(2\pi)$. Ponadto, przesunięcie fazowe $\phi = 45°$.

Przewodność dla typowego metalu wynosi $\sigma \approx 10^7\,(\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$ i $\epsilon \approx \epsilon_0$ oraz $\mu \approx \mu_0$. Czas relaksacji $\tau = \epsilon/\sigma = 8.85 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{s}$ i dla częstości optycznych, $\omega = 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$, mamy spełniony warunek: $\omega\tau \sim 10^{-3} \ll 1$. Długość fali dla tej częstości $\lambda = 2\pi/k = 8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}$, stąd głębokość wnikania jest bardzo mała, $1/\kappa = \lambda/(2\pi) \sim 10^{-8}\,\mathrm{m} = 100\,\text{Å}$. *Metal jest więc nieprzeźroczysty dla światła.*

## 5.4 Odbicie od powierzchni przewodzącej

Warunki graniczne dla tego przypadku to

$$\epsilon_1 E_1^{\perp} - \epsilon_2 E_2^{\perp} = \sigma_{sw} \tag{5.44}$$
$$B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0 \tag{5.45}$$
$$\mathbf{E}_1^{\parallel} - \mathbf{E}_2^{\parallel} = 0 \tag{5.46}$$
$$\frac{1}{\mu_1}\mathbf{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\mathbf{B}_2^{\parallel} = \mathbf{K}_{sw} \times \mathbf{n} \tag{5.47}$$

gdzie $\sigma_{sw}$ gęstość swobodnego ładunku powierzchniowego, a $\mathbf{K}_{sw}$ to gęstość swobodnego prądu powierzchniowego. Dla przewodników spełniających prawo Ohma, $\mathbf{j}_{sw} = \sigma\mathbf{E}$, prąd powierzchniowy $\mathbf{K}_{sw} = 0$, gdyż jego istnienie wymagałoby nieskończonego natężenia pole elektrycznego na granicy.

Rozważmy monochromatyczną falę płaską poruszającą się w kierunku osi $\hat{\mathbf{z}}$ i spolaryzowaną wzdłuż osi $\hat{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{E}^I(z,t) = E_0^I\,\mathrm{e}^{i(k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{x}} \tag{5.48}$$
$$\mathbf{B}^I(z,t) = \frac{1}{v_1}\,E_0^I\,\mathrm{e}^{i(k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{y}} \tag{5.49}$$

Fala odbita to

$$\mathbf{E}^R(z,t) = E_0^R\,\mathrm{e}^{i(-k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{x}} \tag{5.50}$$
$$\mathbf{B}^R(z,t) = -\frac{1}{v_1}\,E_0^R\,\mathrm{e}^{i(-k_1 z - \omega t)}\,\hat{\mathbf{y}} \tag{5.51}$$

natomiast fala przepuszczona w metalu to

$$\mathbf{E}^T(z,t) = E_0^T\, \mathrm{e}^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)}\, \hat{\mathbf{x}} \tag{5.52}$$

$$\mathbf{B}^T(z,t) = \frac{\tilde{k}_2}{\omega}\, E_0^T\, \mathrm{e}^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)}\, \hat{\mathbf{y}} \tag{5.53}$$

gdzie $\tilde{k}_2 = k_2 + i\kappa_2$. Występuje więc tłumienie dla tej fali. Ponieważ pola $\mathbf{E}$ nie mają składowej prostopadłej do powierzchni wzdłuż osi $\hat{\mathbf{z}}$, z pierwszego warunku granicznego otrzymujemy $\sigma_{sw} = 0$. Dla składowych równoległych do powierzchni granicznej $(x,y)$, otrzymujemy

$$E_0^I + E_0^R - E_0^T = 0 \tag{5.54}$$

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} E_0^I - \frac{1}{\mu_1 v_1} E_0^R - \frac{\tilde{k}_2}{\mu_2 \omega} E_0^T = 0 \tag{5.55}$$

Ostatni warunek można zapisać w postaci

$$E_0^I - E_0^R = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_2\, E_0^T \equiv \tilde{\beta}\, E_0^T \tag{5.56}$$

gdzie $\tilde{\beta}$ jest wielkością zespoloną ze względu na $\tilde{k}_2$. Stąd związki Fresnela dla rozważanego przypadku

$$E_0^R = \frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}}\, E_0^I \tag{5.57}$$

$$E_0^T = \frac{2}{1 + \tilde{\beta}}\, E_0^I \tag{5.58}$$

Dla doskonałego przewodnika, $\sigma = \infty$, mamy $\tilde{k}_2 \to \infty$. Stąd $\tilde{\beta} \to \infty$ i wtedy

$$E_0^R = -E_0^I\,, \qquad\qquad E_0^T = 0 \tag{5.59}$$

Fala zostaje całkowicie odbita z przesunięciem fazowym 180°. Zwierciadła wytwarza się więc z bardzo dobrych przewodników, np. srebra. Głębokość wnikania jest wtedy niewielka, rzędu 100 Å jak to pokazaliśmy w poprzednim rozdziale, stąd warstwa metalu napylana na szkło jest zwykle bardzo cienka.

## 5.5 Zależność współczynnika załamania od częstości

Do tej pory zakładaliśmy, że współczynniki charakteryzujące ośrodek, podatności elektryczne i magnetyczne oraz przewodność, nie zależą od częstości fali elektromagnetycznej. Są jednak ośrodki, dla których tak nie jest. Na przykład, kwarcyt, z którego zbudowany jest pryzmat, wykazuje zjawisko **dyspersji** czyli ugięcia fali świetlnej, zależnego od częstości fali. Oznacza to, że współczynnik załamania ośrodka jest funkcją częstości

$$n = n(\omega) \tag{5.60}$$

Fale o różnych częstościach rozchodzą się w ośrodku z różnymi prędkościami. Dla substancji niemagnetycznych

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)} = \sqrt{1 + \chi_e(\omega)} \tag{5.61}$$

czyli problem wyjaśnienia zależności współczynnika załamania od częstości sprowadza się do wyjaśnienia tej zależności dla podatności elektrycznej $\chi_e$.

Użyjemy do tego celu modelu dielektryka, w którym nieprzewodzące elektrony, związane w cząsteczkach, są pobudzane do drgań harmonicznych przez zmienne pole elektryczne monochromatycznej fali elektromagnetycznej o częstości $\omega$. Elektrony wypromieniowują falę o tej samej częstości lub absorbują falę padającą w okolicy częstości rezonansowej $\omega_0$. Klasyczne równanie ruchu takiego elektronu (w jednym wymiarze $x$) to

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\gamma\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=qE_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{5.62}$$

gdzie $\gamma$ jest stałą tłumienia o wymiarze $s^{-1}$. Zastosowaliśmy zapis zespolony, co oznacza, że $x$ jest jest wielkością zespoloną. Podstawiając rozwiązanie w postaci do równania

$$x=x_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{5.63}$$

dostajemy

$$x_0=\frac{q/m}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\,E_0 \tag{5.64}$$

Stąd zespolony moment dipolowy elektronu

$$p=qx=\frac{q^2/m}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}\,E_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{5.65}$$

gdzie $q$ jest ładunkiem elektronu.

Wprowadźmy zespoloną polaryzację $\tilde{\mathbf{P}}$ oraz zespoloną podatność elektryczną $\tilde{\chi}_e$ poprzez równanie

$$\tilde{\mathbf{P}}=\epsilon_0\tilde{\chi}_e\tilde{\mathbf{E}} \tag{5.66}$$

Zakładając, że w każdej cząsteczce znajduje się $f_j$ elektronów o częstości własnej $\omega_j$ i stałej tłumienia $\gamma_j$, a w jednostce objętości znajduje się $N$ cząsteczek, to polaryzacja $\mathbf{P}$ wynosi

$$\tilde{\mathbf{P}}=\frac{Nq^2}{m}\sum_j\frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-i\gamma_j\omega}\,\tilde{\mathbf{E}} \tag{5.67}$$

gdzie sumujemy po elektronach w cząsteczce. Stąd zespolona polaryzacja względna

$$\tilde{\epsilon}_r\equiv\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0}=1+\tilde{\chi}_e=1+\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}\sum_j\frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-i\gamma_j\omega} \tag{5.68}$$

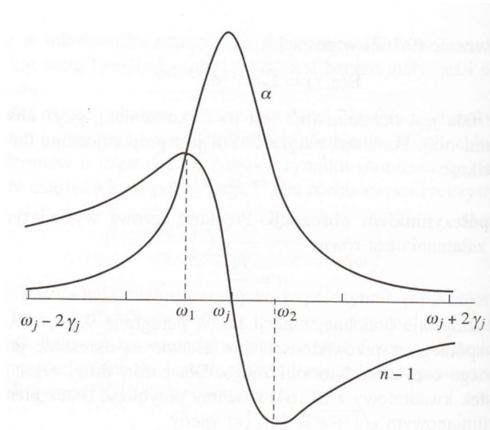
W gazach drugi wyraz w sumie jest zwykle mały i korzystając z relacji $\sqrt{1+\epsilon}\simeq 1+\epsilon/2$, możemy zapisać

$$\sqrt{\tilde{\epsilon}_r}=1+\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0}\sum_j\frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2-i\gamma_j\omega}= \tag{5.69}$$

$$=1+\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0}\sum_j\frac{f_j(\omega_j^2-\omega^2)}{(\omega_j^2-\omega^2)^2+\gamma_j^2\omega^2}+i\,\frac{Nq^2\omega}{2m\epsilon_0}\sum_j\frac{f_j\gamma_j}{(\omega_j^2-\omega^2)^2+\gamma_j^2\omega^2} \tag{5.70}$$

W ośrodkach dyspersyjnych zespolone równanie falowe o danej częstości $\omega$

$$\Delta\tilde{\mathbf{E}}=\tilde{\epsilon}\mu_0\frac{\partial^2\tilde{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \tag{5.71}$$




Rysunek 5.2: Współczynnik załamania i współczynnik absorbcji $\alpha = 2\kappa$ w okolicy częstości rezonansowej.

ma rozwiązanie w postaci fal płaskich

$$\tilde{\mathbf{E}}(z,t) = E_0 \, \mathrm{e}^{i(\tilde{k}z - \omega t)} \tag{5.72}$$

gdzie $\tilde{k}$ jest zespoloną liczba falową

$$\tilde{k} = k + i\kappa = \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu_0}\,\omega = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r}\,\frac{\omega}{c} \tag{5.73}$$

Stąd zespolony współczynnik załamania

$$\tilde{n} = \sqrt{\tilde{\epsilon}_r} = \frac{c\tilde{k}}{\omega} = \frac{ck}{\omega} + i\frac{c\kappa}{\omega} \tag{5.74}$$

Uwzględniając zespoloną postać $\tilde{k}$ dostajemy

$$\tilde{\mathbf{E}}(z,t) = E_0 \, \mathrm{e}^{-\kappa z} \, \mathrm{e}^{i(kz - \omega t)} \tag{5.75}$$

Część urojona $\tilde{k}$ jest odpowiedzialna za tłumienie fali ze współczynnikiem absorbcji $\kappa$, natomiast część rzeczywista $\tilde{k}$ prowadzi do prędkości fazowej $v = \omega/k$ i współczynnika załamania $n = c/v$. Stąd *część rzeczywista* zespolonego współczynnika załamania

$$n_R = \frac{ck}{\omega} = \frac{c}{v} = n \tag{5.76}$$

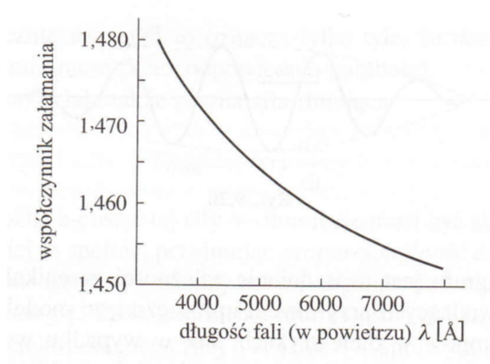
natomiast *część urojona*

$$n_I = \frac{c}{\omega}\,\kappa \tag{5.77}$$

Wykorzystując przybliżony wzór na $\sqrt{\tilde{\epsilon}_r}$, otrzymujemy

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j(\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2} \tag{5.78}$$

$$\kappa = \frac{Nq^2\omega^2}{2mc\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j\gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega^2} \tag{5.79}$$




Rysunek 5.3: Współczynnik załamania w szkle.

Zanalizujmy zachowanie jednego z członów w powyższych sumach w okolicach częstości rezonansowej $\omega \approx \omega_j$. Współczynnik $n-1$ gwałtownie malej do zera, zmieniając znak po przejściu częstości rezonansowej, co oznacza, że $n<1$ i prędkość fazowa fali $v>c$ dla $\omega>\omega_j$, patrz Rysunek 5.2. Jest to obszar dyspersji anomalnej, w którym występuje maksymalne tłumienie fali ze współczynnikiem

$$\kappa_{max} = \kappa(\omega_j) \approx \frac{Nq^2}{2mc\epsilon_0}\frac{f_j\omega_j}{\gamma_j} \tag{5.80}$$

gdzie zaniedbaliśmy inne wyrazy w sumie po $j$, zakładając, iż ich wkład w okolicy $\omega \approx \omega_j$ jest mały.

Daleko od rezonansów, $\omega \ll \omega_j$, gdy tłumienie $\gamma_j \ll \omega_j$, otrzymujemy

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2-\omega^2} \tag{5.81}$$

Rozwijając mianownik w potęgach małych wielkości $\omega/\omega_j$, mamy

$$\frac{1}{\omega_j^2-\omega^2} = \frac{1}{\omega_j^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right)^{-1} \approx \frac{1}{\omega_j^2}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_j^2}\right) = \frac{1}{\omega_j^2}+\frac{\omega^2}{\omega_j^4} \tag{5.82}$$

i stąd współczynnik załamania

$$n = 1 + \frac{Nq^2}{2m\epsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} + \omega^2\left(\frac{Nq^2}{2m\epsilon_0}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^4}\right) \tag{5.83}$$

Wzór ten można powiązać ze wzorem Cauchego po wprowadzeniu długości fali elektromagnetycznej w próżni $\lambda = 2\pi c/\omega$

$$n = 1 + A\left(1+\frac{B}{\lambda^2}\right) \tag{5.84}$$

Wzór ten dobrze tłumaczy zachowanie współczynnika załamania w gazach.

## 5.6 Literatura

1. David J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, Wydwanictwo Naukowe PWN 2005