Wprowadzenie do modelu standardowego cząstek elementarnych

Krzysztof Golec–Biernat

Instytut Fizyki Jadrowej PAN w Krakowie

(12 kwietnia 2022)

Wersja robocza nie do dystrybucji

Kraków
2003/04

Spis treści

Rozdział 1

Model standardowy

Identyczne cząstki kwantowe są nierozróżnialne, dlatego najbardziej podstawowym podziałem cząstek elementarnych jest podział na:

- bozony: cząstki podlegające statystyce Bosego–Einsteina (w danym stanie kwantowym może znajdować się dowolna liczba bozonów) o spinie całkowitym $(0, 1, 2, ...)$,

- fermiony: cząstki podlegające statystyce Fermiego–Diraca (w danym stanie kwantowym może znajdować się co najwyżej jeden fermion) o spinie połówkowym $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, ...)$.

Związek między spinem cząstek a statystyką jest fundamentalnym wynikiem kwantowej teorii pola, zgodnym z obserwacjami. Symetria, która pozwala łączyć bozony i fermiony w jeden stan kwantowy (multiplet) nazywa się **supersymetrią**.

1.1 Bozony pośredniczące

Obecnie identyfikuje się cztery fundamentalne oddziaływania przenoszone przez wymienione poniżej **bozony pośredniczące**:

Oddziaływanie	Bozony pośredniczące	Spin	Masa
elektromagnetyczne	1 foton	1	0
słabe	3 bozony W^+,W^-, Z^0	1	masowe
silne	8 gluonów	1	0
grawitacyjne	1 grawiton	2	0

Do chwili obecnej nie skonstruowano konsystentnej kwantowej teorii grawitacji, więc grawiton jest tylko hipotetycznym bozonem pośredniczącym pojawiającym się w wyniku "naiwnego" skwantowania klasycznej teorii grawitacji – ogólnej teorii względności. Od tej chwili skoncentrujemy się wyłącznie na pierwszych trzech oddziaływaniach, ignorując efekty grawitacyjne. Być może jest to błąd, który może mieć istotne konsekwencje dla konstrukcji teorii zunifikowanych oddziaływań, niemniej jednak uważa się, że przy obecnie badanym zakresie energii grawitacja nie odgrywa istotnej roli.

Ważną cechą odróżniającą fotony od reszty bozonów pośredniczących jest to, iż nie oddziaływują one same z sobą. Pozostałe bozony pośredniczące oddziaływują między sobą ale tylko w ramach danego oddziaływania (tzn. bozony słabe nie oddziaływują bezpośrednio z gluonami).

Model standardowy cząstek elementarnych łączy trzy pierwsze oddziaływania w jeden schemat opisu oparty o nieprzemienną (nieabelową) **grupę cechowania**

$$U(1)\otimes SU(2)\otimes SU(3)\,, \tag{1.1}$$

gdzie grupa $U(1)\otimes SU(2)$ jest związana z oddziaływaniami elektromagnetycznymi i słabymi, a $SU(3)$ z oddziaływaniami silnymi. Każda z grup wnosi niezależną stałą sprzężenia określającą siłę poszczególnych oddziaływań. Teorię oddziaływań elektrosłabych nazywa się teorią Weinberga–Salama, natomiast chromodynamika kwantowa (QCD) jest teorią oddziaływań silnych.

W ramach tego schematu bozony pośredniczące są opisywane wektorowymi **polami cechowania** skojarzonymi z generatorami poszczególnych grup. I tak

- pole cechowania fotonu jest skojarzone z generatorem grupy $U(1)$: 1
- pola cechowania trzech bozonów słabych są skojarzone z generatorami grupy $SU(2)$, macierzami Pauliego: σ_1, σ_2, σ_3
- pola cechowania ośmiu gluonów są związane z generatorami grupy $SU(3)$, macierzami Gell-Manna: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_8$.

Jak zobaczymy w trakcie wykładu, w rzeczywistości pola cechowania odpowiadające generatorom 1 oraz σ_3 są ze sobą "zmieszane" by otrzymać bezmasowy foton γ i masowe Z^0. Dlatego zwykle mówi się o oddziaływaniu elektrosłabym, ktorego bozonami pośredniczącymi są: $W^{\pm}, Z^0$ oraz γ.

W związku z istnieniem trzech różnych oddziaływań (i odpowiadającym im trzem różnym stałym sprzężenia[1]) rozważa się idee **wielkiej unifikacji**. Mianowicie, przy energiach dużo wyższych niż osiągalne obecnie w eksperymentach akceleratorowych istnieje tylko jedno oddziaływanie (oprócz grawitacyjnego) opisywane przez szerszą grupę G (wnoszącą tylko jedną stałą sprzężenia) taką, że

$$U(1)\otimes SU(2)\otimes SU(3)\subset G\,. \tag{1.2}$$

Pola cechowania nowej grupy odpowiadają bozonom pośredniczącym nowego oddziaływania. Zwykle przyjmuje się, że energia przy której pojawia sie unifikujące oddziaływanie jest rzędu 10^{15} GeV. Przy obecnie badanym zakresie energii (rzędu 10^3 GeV) grupa wielkiej unifikacji jest **spontanicznie złamana** do grupy modelu standardowego. Przykładem grupy unifikującej jest $G = SU(5)$ z 24 bozonami pośredniczącymi. Prowadzi ona do rozpadu swobodnego protonu.

[1] Jak zobaczymy, w rzeczywistosci stałe sprzężenia nie są stalymi gdyż zależą od charakterystycznej skali energii, przy której badamy interesujące nas oddziaływania.

1.2 Elementarna materia fermionowa

Elementarna materia fermionowa (o spinie $\frac{1}{2}$) dzieli się na:

- leptony: oddziaływują tylko elektrosłabo; są bezpośrednio obserwowane w asymptotycznych stanach początkowych lub końcowych procesów rozproszeniowych

- kwarki: oddziaływują elektrosłabo i silnie; nie są bezpośrednio obserwowane w stanach asymptotycznych, są uwięzione w *hadronach*.

Hadrony to bezpośrednio obserwowane cząstki oddziaływujące silnie i elektrosłabo, zbudowane z elementarnych kwarków. I tak, mamy dwa rodzaje hadronów:

- mezony to bozony będące stanami związanymi pary kwark-antykwark $(q\overline{q})$,

- bariony to fermiony będące stanami związanymi trzech (qqq) lub, być może, pięciu $(qqqq\overline{q})$ kwarków.

Kwarki niosą ułamkowe wartości ładunku elektrycznego elektronu, a także posiadają ładunki **kolorowe**, związany z grupą cechowania $SU(3)$. Bezpośrednio obserwowane hadrony nie niosą jednak ładunku kolorowego, gdyż układy kwarków tworzących hadrony znajdują się w stanach singletowych (białych) ze względu na transformacje grupy $SU(3)$. To zjawisko nazywane jest **uwięzieniem**. Inną ważną cechą oddziaływań kwarków jest **asymptotyczna swoboda**: na małych odległościach kwarki zachowują się jak cząstki swobodne, podczas gdy przy zwiększaniu odległości siła oddziaływań miedzy nimi rośnie.

W Modelu Standardowym leptony i kwarki łączone są w multiplety ze względu na transformacje $SU(2)$. I tak, mamy do czynienie z trzema multipletami (generacjami):

- dla leptonów

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$e_R \qquad \mu_R \qquad \tau_R$$

- dla kwarków

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

$$u_R,\ d_R \qquad c_R,\ s_R \qquad t_R,\ b_R$$

gdzie L, R oznacza skrętność, odpowiednio lewą i prawą. Zauważmy, iż prawoskrętne leptony nie mają towarzyszy (są singletami ze względu na transformacje $SU(2)$), gdyż nie obserwuje się prawoskrętnych neutrin. Ten fakt wymusza to, że prawoskrętne kwarki nie tworzą multipletów pozostając singletami.

Do wymienionych cząstek należy jeszcze dodać ich antycząstki oraz uwzględnić fakt, iż kwarki istnieją w trzech różnych stanach kolorowych, rozróżnianych tylko w oddziaływaniach silnych.

1.3 Bozon Higgsa

W modelu standardowym istnieje jeszcze jedna cząstka, kluczowa dla obserwowanych mas elektrosłabych bozonów pośredniczących oraz materii fermionowej. Tą cząstką jest bozon Higgsa o spinie 0. Jak dotąd nie zaobserwowano jej przy energiach osiąganych w obecnie działających akceleratorach. Uważa się, że budowany obecnie akcelerator LHC w CERN-ie powinien umożliwić jej odkrycie. W przeciwnym wypadku trzeba będzie w istotny sposób zmodyfikować mechanizm generowania mas w Modelu Standardowym.

Podstawą opisu materii i jej oddziaływań w modelu standardowym jest **kwantowa teoria pola**. Jest to schemat, który łączy zasady szczególnej teorii względności z podstawowymi zasadami mechniki kwantowej. W kwantowej teorii pola liczba cząstek nie jest zachowana, cząstki są tworzone i niszczone. Pola kwantowe o określonych własnościach transformacyjnych względem transformacji Lorentza są skojarzone z omawianymi cząstkami. I tak:

- pole **skalarne** opisuje bozon Higgsa o spinie 0
- pola **bispinorowe** Diraca opisują materię fermionową o spinie $\frac{1}{2}$
- pola **wektorowe** opisują bozony pośredniczące o spinie 1.

Celem tego wykładu jest wyjaśnienie pojawiających się w tym rozdziale pojęć, co pozwoli przedstawić rzeczywistość fizyczną opisywaną przy pomocy modelu standardowego cząstek elementarnych.

Rozdział 2

Geometria czasoprzestrzeni

W wykładzie zaniedbujemy zjawiska grawitacyjne, w związku z tym pola kwantowe modelu standardowego są określone na płaskiej rozmaitości zdarzeń zwanej **czasoprzestrzenią Minkowskiego**. Punkty (zdarzenia) w tej przestrzeni można sparametryzować przy pomocy współrzędnych związanych z dowolnie wybranym **inercjalnym układem odniesienia**. Wybór układu oznacza, że wyróżniony został punkt czasoprzestrzeni O, któremu przyporządkowane zostały współrzędne zerowe:

$$O \;\longleftrightarrow\; (0,0,0,0)\,.$$

Jest to zdarzenie “tu i teraz” względem którego obserwator inercjalny mierzy czas i odległość w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach. Dowolne zdarzenie P jest scharakteryzowane przez cztery liczby: czas i trzy współrzędne przestrzenne

$$P \;\longleftrightarrow\; (ct,x,y,z) = (x^0,x^1,x^2,x^3) \equiv (x^\mu)\,. \tag{2.1}$$

Stała c jest niezmienniczą prędkością światla, taką samą dla wszystkich obserwatorów inercjalnych. Po wyborze zdarzenia O czasoprzestrzeni Minkowskiego można nadać strukturę czterowymiarową przestrzenią wektorowej. Każdemu zdarzeniu P odpowiada czterowektor położenia **OP** o współrzędnych (x^μ). Dowolne dwa zdarzenia P i P' są połączone czterowektorem Δx o współrzędnych

$$\Delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu\,. \tag{2.2}$$

Dla dowolnych dwóch czterowektorów u i w jest określony symetryczny **iloczyn skalarny**:

$$g(u,w) = g(w,u) = u^0w^0 - u^1w^1 - u^2w^2 - u^3w^3\,. \tag{2.3}$$

Przy pomocy iloczynu skalarnego można określić kwadrat odległości między dwoma dowolnymi zdarzeniami P i P' rozdzielonych czterowektorem Δx

$$\Delta x^2 \equiv g(\Delta x,\Delta x) = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2\,. \tag{2.4}$$

Tak określony kwadrat odległości nie jest dodatnio określony, w związku z tym zdarzenia są rozdzielone:

- czasowo, gdy Δx jest wektorem czasowym: $\Delta x^2 > 0$

- przestrzennie, gdy Δx jest wektorem przestrzennym: $\Delta x^2 < 0$

- leżą na stożku światła, gdy Δx jest wektorem zerowym: $\Delta x^2 = 0$.

Stożkiem światła zdarzenia P nazywamy zbiór wszystkich zdarzeń połączonych z P wektorem **zerowym** (sygnałem świetlnym). Każdy punkt P czasoprzestrzeni Minkowskiego ma swój własny stożek światła.

Wszystkie zdarzenia oddzielone **czasowo** od punktu P leżą wewnątrz jego stożka światła i mogą być z nim połączone sygnałem poruszającym sie z prędkością mniejszą niż prędkość światła. Taki sygnał zachowuje kolejność czasową, której nie można odwrócić poprzez zmianę inercjalnego układu odniesienia.

Wszystkie zdarzenia oddzielone **przestrzennie** od punktu P leżą na zewnątrz jego stożka światła i nie mogą być powiązane z nim przyczynowo. Gdyby istniał sygnał, który je łaczy to kolejność czasowa zdarzeń mogłaby ulec odwróceniu przy zmianie inercjalnego układu odniesienia, co prowadziłoby do zamiany skutku z przyczyną.

Taki podział zdarzeń jest niezmienniczy ze względu na transformacje zachowujące strukturę przestrzeni Minkowskiego – przekształcenia Lorentza.

2.1 Przekształcenia Lorentza

Przekształcenia Lorentza to transforamcje czterowektorów, $u' = Lu$, które

- są liniowe

$$L(u+w) = Lu + Lw\,, \qquad L(\alpha u) = \alpha(Lu)\,, \qquad \alpha \in R\,, \tag{2.5}$$

- zachowują iloczyn skalarny

$$g(Lu, Lw) = g(u, w)\,. \tag{2.6}$$

Z ostatniej własności wynika, że zachowany jest także kwadrat długości czterowektorów $u^2 = g(u, u)$.

Wprowadzając bazę kanoniczną $\{e_\mu\}$, możemy znaleźć współrzędne dowolnego czterowektora w tej bazie

$$u = u^\mu e_\mu\,. \tag{2.7}$$

Z własności liniowości transformacji Lorentza $u' = Lu$, znajdziemy:

$$u' = u'^\mu e_\mu = L(u^\nu e_\nu) = u^\nu (L e_\nu)\,. \tag{2.8}$$

Definiując macierz przekształcenia Lorentza,

$$L e_\nu = L^\mu{}_\nu\, e_\mu\,, \tag{2.9}$$

otrzymamy prawo transformacyjne współrzędnych czterowektora

$$u'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} u^{\nu} \,. \tag{2.10}$$

Iloczyn skalarny (2.3) to symetryczna forma dwuliniowa, zadana przez składowe tensora metrycznego $g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu)$, gdyż

$$g(u,w) = g(u^\mu e_\mu, w^\nu e_\nu) = u^\mu w^\nu g(e_\mu, e_\nu) = g_{\mu\nu} u^\mu w^\nu \,. \tag{2.11}$$

Z symetrii iloczynu skalarnego $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. W przestrzeni Minkowskiego tensor metryczny jest diagonalny

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{2.12}$$

Z własności (2.6) transformacji Lorentza otrzymujemy

$$g_{\mu\nu} u'^{\mu} w'^{\nu} = g_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} u^\alpha w^\beta = g_{\alpha\beta} u^\alpha w^\beta \,. \tag{2.13}$$

Stąd następujący związek dla elementów macierzy przekształcenia Lorentza

$$g_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \,. \tag{2.14}$$

Ze względu na symetrię tensora metrycznego warunki (2.14) nakładają 10 niezależnych równań na 16 elementów macierzy $L^{\mu}_{\ \nu}$. Stąd najogólnijesze przekształcenie Lorentza ma 6 parametrów. Łatwo je znaleźć w przypadku infinitezymalnej transformacji Lorentza

$$L^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\ \nu} + \epsilon^{\mu}_{\ \nu} \,. \tag{2.15}$$

Po podstawieniu do (2.14) otrzymujemy z dokładnością do wyrazów liniowych w małych parametrach

$$g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\nu} \epsilon^{\nu}{}_{\beta} + g_{\mu\beta} \epsilon^{\mu}{}_{\alpha} = g_{\alpha\beta} \,. \tag{2.16}$$

Definiując $\epsilon_{\alpha\beta} = g_{\alpha\nu} \epsilon^{\nu}{}_{\beta}$, znajdujemy bezpośrednio 6 infnitezymalnie małych parametrów tworzących antysymetryczną macierz 4×4:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha} \tag{2.17}$$

Warunek (2.14) można zapisać w formie macierzowej definiując macierz transponowaną:

$$(L^T)_{\alpha}^{\ \mu} = L^{\mu}{}_{\alpha} \,. \tag{2.18}$$

Interpretując pierwszy wskaźnik jako numer wiersza, a drugi jako numer kolumny otrzymujemy

$$L^T g L = g \,. \tag{2.19}$$

Zbiór macierzy przekształceń Lorentza spełniających powyższy związek tworzy grupę z elementem jednostkowym $L = 1$ i elementem odwrotnym L^{-1} dla każdego przekształcenia L.

Ćwiczenie 1
Udowodnić, że zbiór macierzy przekształceń Lorentza tworzy grupę.

Obliczmy wyznacznik obu stron równania (2.19)

$$\det L^T \det g \det L = \det g\,.$$

Ponieważ $\det L^T = \det L$ oraz $\det g = -1$, otrzymujemy

$$\det L = \pm 1\,. \tag{2.20}$$

Zapiszmy następnie równanie (2.14) dla składowej $\alpha = \beta = 0$

$$g_{00} = 1 = (L^0{}_0)^2 - (L^1{}_0)^2 - (L^2{}_0)^2 - (L^3{}_0)^2$$

i stąd

$$(L^0{}_0)^2 = 1 + (L^1{}_0)^2 + (L^2{}_0)^2 + (L^3{}_0)^2 \geqslant 1\,. \tag{2.21}$$

Tak więc na podział wynikający z równania (2.20) nakłada się podział wynikający z powyższego związku

$$L^0{}_0 \geqslant 1 \qquad \text{lub} \qquad L^0{}_0 \leqslant -1\,. \tag{2.22}$$

Ostatecznie grupa przekształceń Lorentza dzieli się na cztery składowe

Przekształcenie Lorentza	$\det L$	$\operatorname{sgn} L^0{}_0$
właściwe ortochroniczne	$+1$	$+$
odbicie czasowe	-1	$-$
odbicie przestrzenne	-1	$+$
odbicie zupełne	$+1$	$-$

Właściwe ortochroniczne przekształcenia Lorentza stanowią składową spójną grupy Lorentza, gdyż każda transformacja tej klasy może być sprowadzona do przekształcenia jednostkowego poprzez ciągłą zmianę jej parametrów. Składowa ta jest izomorficzna z grupą $SO(1,3)$, składającą się z rzeczywistych macierzy o wymiarze 4×4 i wyznaczniku równym 1, zachowujących iloczyn skalarny (2.3) o sygnaturze $(+---)$.

Ćwiczenie 2
Udowodnić, że transformacja

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 \cosh\beta + x^1 \sinh\beta \\ x'^1 &= x^0 \sinh\beta + x^1 \cosh\beta \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \tag{2.23}$$

jest właściwym ortochronicznym przekształceniem Lorentza oraz, że w granicy $\beta \to 0$ otrzymujemy przekształcenie jednostkowe. Pokazać, że jeśli układ inercjalny S' porusza się w kierunku dodatnim wzdłuż osi $\hat{1}$ z prędkością v to

$$\cosh\beta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad \sinh\beta = \frac{-v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,. \tag{2.24}$$

Właściwe ortochroniczne przekształcenie Lorentza opisują zmianę współrzędnych czasoprzestrzeni związaną ze zmianą inercjalnego układu odniesienia. Trzy następne przekształcenia odpowiadają odbiciom czasu, $t \to -t$, lub odbiciom w trójwymiarowej przestrzeni, $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$.

Ćwiczenie 3
Podać postać przekształceń Lorentza realizujących odbicia składowych czasowych lub przestrzennych czterowektorów.

Współzmienniczość równań fizyki względem przekształceń Lorentza wyraża zasadę względności Galileusza o niemożności wyróżnienia jakiegokolwiek inercjalnego układu odniesienia. W szczególności, nie jest możliwy pomiar absolutnej prędkości układu inercjalnego.

Przekształcenie Lorentza

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu\, x^\nu \tag{2.25}$$

nie zmienia wyróżnionego punktu odniesienia O. Niejednorodne przekształcenie Lorentza,

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu\,, \tag{2.26}$$

które przesuwa punkt odniesienia o stały wektor a^μ nazywa się **przekształceniem Poincarego**. Zauważmy, że w ten sposób współrzędne każdego punktu zostaną przesunięte o ten sam wektor, dlatego kwadrat odległości (2.4) nie ulegnie zmianie. Jest to najogólniejsza, *dziesięcioparametrowa* transformacja przestrzeni Minkowskiego zachowująca kwadrat odległości (2.4). Do 6 parametrów jednorodnego przekształcenia Lorentza dochodzą 4 dodatkowe: a^μ.

2.2 Tensory i ich niezmienniki

Obiekt o składowych u^μ transformujących się przy zmianie inercjalnego układu odniesienia tak jak czterowektor położenia (2.25) nazywamy **wektorem kontrawariantnym**:

$$u'^\mu = L^\mu{}_\nu\, u^\nu\,. \tag{2.27}$$

Wektor kowariantny to obiekt o składowych w_μ transformujący się przy zmianie inercjalnego układu odniesienia przy pomocy macierzy odwrotnej L^{-1}:

$$w'_\mu = w_\alpha\, (L^{-1})^\alpha{}_\mu\,. \tag{2.28}$$

Sumując (zwężając) składowe wektora ko- i kontrawariantnego otrzymujemy **niezmiennik** transformacji Lorentza, gdyż

$$w'_\mu\, u'^\mu = w_\alpha\, (L^{-1})^\alpha{}_\mu L^\mu{}_\nu\, u^\nu = w_\alpha\, \delta^\alpha_\nu\, u^\nu = w_\alpha u^\alpha\,.$$

Wektory u^μ i w_μ są przykładami tensorów, obiektów wielowskaźnikowych transformujących się w sposób jednorodny. W ogólności, **tensorem** T typu (p,q) o p wskaźnikach kontrawariantnych i q wskaźnikach kowariantnych nazywamy obiekt, którego składowe transformują się w następujący sposób:

$$T'^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} = L^{\mu_1}_{\alpha_1}\ldots L^{\mu_p}_{\alpha_p}\,(L^{-1})^{\beta_1}_{\nu_1}\ldots(L^{-1})^{\beta_q}_{\nu_q}\,T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}{}_{\beta_1\ldots\beta_q}\,, \tag{2.29}$$

Niezmienniki tensorowe otrzymuje się zwężając wszystkie górne i dolne wskaźniki, na przykład dla tensora typu (p,p)

$$T = T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\mu_1\ldots\mu_p}\,,$$

lub mając do dyspozycji dwa tensory typu (p,q) i (q,p)

$$T\cdot R = T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q}R^{\nu_1\ldots\nu_q}{}_{\mu_1\ldots\mu_p}\,.$$

Ćwiczenie 4

Pokazać, że operatory

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \qquad\qquad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \tag{2.30}$$

transformują się jak wektory, odpowiednio, ko- i kontrawariantne.

$$\partial'_\mu = (L^{-1})^\nu{}_\mu\,\partial_\nu \qquad\qquad \partial'^\mu = L^\mu{}_\nu\,\partial^\nu\,. \tag{2.31}$$

Tak więc jeśli ϕ jest funkcją skalarną to $\partial_\mu\phi$ i $\partial^\mu\phi$ są wektorami ko- i kontrawariantnymi. Z ćwiczenia tego wynika także, iż operator d'Alamberta,

$$\Box = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\,, \tag{2.32}$$

jest niezmiennikiem przekształceń Lorentza. Podobnie niezmiennicze jest też równanie d'Alamberta dla funkcji skalarnej:

$$\Box\phi = 0$$

.

Zdefiniujmy tensor $g^{\mu\nu}$ odwrotny do tensora metrycznego $g_{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu\,. \tag{2.33}$$

W przestrzeni Minkowskiego ma on tą samą postać (2.12) co tensor $g_{\mu\nu}$. Przy pomocy obu tensorów można opuszczać i podnosić wskaźniki tensorów, utożsamiając na przykład wektory ko- i kontrawariantne

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu\,, \tag{2.34}$$

lub

$$x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu\,. \tag{2.35}$$

Jeżeli w wybranym układzie współrzędnych $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$ to po opuszczeniu wskaźników $x_\mu = (x^0, -\mathbf{x})$.

Łatwo sprawdzić, że operacja podnoszenia i opuszczania wskaźników jest dobrze określona, gdyż, na przykład, składowe x_μ ze wzoru (2.34) transformują się jak kowariantne składowe wektora (2.28)

$$x'_\mu = g_{\mu\nu}\, x'^\nu = g_{\mu\nu}\, L^\nu{}_\alpha\, x^\alpha = (L^{-1})^\beta{}_\mu\, g_{\beta\alpha}\, x^\alpha = x_\beta\, (L^{-1})^\beta{}_\mu\,,$$

gdzie wykorzystaliśmy własność macierzy Lorentza

$$g_{\mu\nu}\, L^\nu{}_\alpha = (L^{-1})^\beta{}_\mu\, g_{\beta\alpha}\,, \tag{2.36}$$

wynikającą ze wzoru (2.14). Zgodnie z tym co otrzymaliśmy w poprzednim rozdziale, niezmiennicza długość czterowektora x przyjmuje następującą postać

$$x^2 = g_{\mu\nu}\, x^\mu x^\nu = x_\mu\, x^\mu = (x^0)^2 - (\mathbf{x})^2\,. \tag{2.37}$$

Bardzo ważną operacją jest rozkład tensora na sumę tensorów o określonych własnościach ze względu na przestawianie wskaźników. Na przykład, dowolny tensor $T_{\mu\nu}$ można rozłożyć na sumę tensora symetrycznego i tensora antysymetrycznego:

$$T_{\mu\nu} = T^{(s)}_{\mu\nu} + T^{(as)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})\,,$$

gdyż

$$T^{(s)}_{\mu\nu} = T^{(s)}_{\nu\mu}\,, \qquad\qquad T^{(as)}_{\mu\nu} = -T^{(as)}_{\nu\mu}\,. \tag{2.38}$$

Łatwo sprawdzić, że zwężenie tensora symetrycznego z antysymetrycznym daje zero

$$T^{(s)}_{\mu\nu}\, F^{(as)\,\mu\nu} = 0\,. \tag{2.39}$$

<u>Ćwiczenie 5</u>
Udowodnić własność (2.39).

2.2.1 Pseudotensor epsilon

Bardzo ważnym obiektem jest całkowicie antysymetryczny pseudotensor $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$, którego składowa $\epsilon^{0123} = 1$. Nieparzysta permutacja wskaźników zmienia wartość tensora na przeciwną (1 lub -1), natomiast permutacja parzysta nie prowadzi do zmiany wartości. Wynika stąd, że przy powtarzających się wskaźnikach składowe tensora są równe 0.

Zobaczmy jak transformuje się ten obiekt, tzn. zbadajmy wyrażenie

$$E^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} = L^{\mu'}{}_\mu\, L^{\nu'}{}_\nu\, L^{\alpha'}{}_\alpha\, L^{\beta'}{}_\beta\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,. \tag{2.40}$$

Zauważmy, że $E^{0123} = \det(L)$. Ponadto obiekt E jest całkowicie antysymetryczny. Na przykład, przestawiając pierwsze dwa wskaźniki μ', ν' otrzymamy

$$E^{\nu'\mu'\alpha'\beta'} = L^{\nu'}{}_\mu L^{\mu'}{}_\nu L^{\alpha'}{}_\alpha L^{\beta'}{}_\beta\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = L^{\mu'}{}_\nu\, L^{\nu'}{}_\mu L^{\alpha'}{}_\alpha L^{\beta'}{}_\beta (-\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta}) = -E^{\mu'\nu'\alpha'\beta'}\,.$$

Udowodniliśmy tym samym, że $E \sim \epsilon$, dokładniej

$$L^{\nu'}{}_{\mu}\, L^{\mu'}{}_{\nu}\, L^{\alpha'}{}_{\alpha}\, L^{\beta'}{}_{\beta}\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \det(L)\, \epsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'} \tag{2.41}$$

Tak więc przy właściwych przekształceniach Lorentza ϵ jest tensorem numerycznie niezmienniczym, natomiast przy odbiciach z $\det(L) = -1$ składowe zmieniaja znak. Stąd $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ jest pseudotensorem.

Podobnie zdefiniować można całkowicie antysymetryczny tensor z dolnymi wskaźnikami

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\mu'}\, g_{\nu\nu'}\, g_{\alpha\alpha'}\, g_{\beta\beta'}\, \epsilon^{\mu'\nu'\alpha'\beta'}\,, \tag{2.42}$$

dla którego zachodzi $\epsilon_{0123} = -1$. Pod wpływem transformacji Lorentza

$$L^{\nu}{}_{\mu'}\, L^{\mu}{}_{\nu'}\, L^{\alpha}{}_{\alpha'}\, L^{\beta}{}_{\beta'}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \det(L)\, \epsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'}\,. \tag{2.43}$$

Ćwiczenie 6
Udowodnić prawo transformacyjne (2.43).

2.3 Generatory przekształceń Lorentza

Dowolne **właściwe ortochroniczne** przekształcenie Lorentza można zapisac w postaci

$$L = \mathrm{e}^{\Omega}\,, \tag{2.44}$$

gdzie Ω jest macierzą, której postać znajdziemy z warunku definiującego transformację Lorentza: $L^T g\, L = g$. Mnożąc z prawej strony przez macierz odwrotną

$$L^{-1} = \mathrm{e}^{-\Omega} \tag{2.45}$$

otrzymamy

$$\mathrm{e}^{\Omega^T} g = g\, \mathrm{e}^{-\Omega}\,. \tag{2.46}$$

Rozwijając w szereg,

$$\left(1 + \Omega^T + \frac{1}{2!}\,(\Omega^T)^2 + \ldots\right) g = g\left(1 - \Omega + \frac{1}{2!}\,\Omega^2 + \ldots,\right), \tag{2.47}$$

a następnie porównując wyrażenia liniowe w Ω, otrzymujemy następujący warunek zapewniający także równość wyrażeń dowolnego wyższego rzędu

$$\Omega^T g = -g\,\Omega\,. \tag{2.48}$$

Definiując następnie macierz

$$\omega = g\,\Omega\,, \tag{2.49}$$

znajdujemy

$$\omega^T = (g\Omega)^T = \Omega^T g = -g\,\Omega = -\omega\,. \tag{2.50}$$

Tak więc macierz ω jest antysymetryczna.

Znaleźliśmy w ten sposób 6 parametrów transformacji Lorentza β i ϕ,

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ -\beta_1 & 0 & \phi_3 & -\phi_2 \\ -\beta_2 & -\phi_3 & 0 & \phi_1 \\ -\beta_3 & \phi_2 & -\phi_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

lub odwracając relację (2.48)

$$\Omega = g\omega = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \beta_2 & \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ \beta_3 & -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Zapiszmy macierz transformacji (2.44) w postaci

$$L = \exp(-i\beta\cdot\mathbf{K} - i\phi\cdot\mathbf{J}), \tag{2.53}$$

która definiuje 6 generatorów przekształceń Lorentza **K** oraz **J**. Poprzez porównanie z (2.52) znajdujemy

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

oraz

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

Zauważmy, że generatory **J** są macierzami hermitowskimi, natomiast **K** są macierzami antyhermitowskimi:

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J} \qquad\qquad \mathbf{K}^\dagger = -\mathbf{K}. \tag{2.56}$$

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że spełnione są następujące reguły komutacji:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk} J_k && (2.57) \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk} K_k && (2.58) \\ [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk} J_k, && (2.59) \end{aligned}$$

gdzie ϵ_{ijk} jest tensorem całkowicie antysymetrycznym z warunkiem $\epsilon_{123} = 1$. Reguły te definiują **algebrę Liego** grupy Lorentza $so(1,3)$.

Traktując macierz ω jako obiekt z dolnymi wskaźnikami

$$\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\alpha}\Omega^\alpha{}_\nu = -\omega_{\nu\mu}, \tag{2.60}$$

możemy zidentyfikować wprowadzone parametry transformacji Lorentza jako

$$\beta_i = \omega_{0i}\,, \qquad \phi_i = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk}\,. \tag{2.61}$$

Umożliwia nam to zapisanie macierzy transformacji Lorenza (2.53) w formie

$$L = \exp\left\{-\tfrac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right\}, \tag{2.62}$$

gdzie operatory $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$. Poprzez porównanie z (2.53), znajdujemy

$$K_i = J^{0i}, \qquad J_i = \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}J^{jk}\,. \tag{2.63}$$

lub po odwróceniu tych relacji

$$J^{0i} = K_i\,, \qquad J^{ij} = \epsilon_{ijk}\,J_k\,. \tag{2.64}$$

Pozwala to zapisać $J^{\mu\nu}$ jako antsymetryczną macierz z elementami będącymi generatorami **K** i **J**

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ -K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.65}$$

Ćwiczenie 7

Udowodnić relacje (2.61) oraz (2.65).

Reguły (2.57) definiują algebrę Liego grupy obrotów $SO(3)$. Transformacja Lorentza

$$L = \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{J}} \tag{2.66}$$

generuje więc trójwymiarowe obroty w przestrzeni euklidesowej położeń. Jest to transformacja unitarna ze względu na hermitowskość generatorów **J**. Dodajmy, że kierunek wektora ϕ określa oś obrotu, a jego długość jest równa kątowi obrotu. Obliczając operator Casimira dla grupy obrotów otrzymujemy

$$\mathbf{J}^2 = (J_1)^2 + (J_2)^2 + (J_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.67}$$

Tak więc w podprzestrzeni położeń: $\mathbf{J}^2 = j(j+1) = 2$. Stąd reprezentacja wektorowa (2.44) grupy Lorentza, którą tutaj dyskutujemy, opisuje spin $j = 1$.

Ćwiczenie 8

Pokazać poprzez rozwinięcie w szereg (2.53), że transformacja z $\phi = (\phi, 0, 0)$ jest obrotem wokół osi $\hat{1}$, tzn. macierz przekształcenia Lorentza przyjmuje następującą postać:

$$L(\phi) = \mathrm{e}^{-i\phi J_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}. \tag{2.68}$$

Udowodnić, że $L(\phi_1)L(\phi_2) = L(\phi_1 + \phi_2)$.

Przekształcenie Lorentza

$$L = \mathrm{e}^{-i\beta\cdot\mathbf{K}} \tag{2.69}$$

jest czystym pchnięciem (boostem) w kierunku wektora β. Transformacja ta nie jest unitarna, gdyż generatory $\mathbf{K}$ są antyhermitowskie. Powodem topologicznym jest fakt, iż grupa Lorentza nie jest grupą zwartą, w przeciwieństwie do grupy czystych obrotów euklidesowych.

Ćwiczenie 9

Pokazać poprzez rowinięcie w szereg (2.69), że transformacja z $\beta = (\beta, 0, 0)$ jest pchnięciem Lorentza wzdłuż osi $\hat{1}$ w kierunku dodatnim, tzn. macierz przekształcenia Lorentza przyjmuje postać transformacji z Ćwiczenia 2:

$$L(\beta) = \mathrm{e}^{-i\beta K_1} = \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta & 0 & 0 \\ \sinh\beta & \cosh\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.70}$$

Udowodnić, że $L(\beta_1)\,L(\beta_2) = L(\beta_1 + \beta_2)$.

2.4 Reprezentacje spinorowe grupy Lorentza

Utwórzmy z generatorów $\mathbf{K}$ i $\mathbf{J}$ właściwej ortochronicznej grupy Lorentza następujące kombinacje:

$$\mathbf{J}^{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} \pm i\mathbf{K}). \tag{2.71}$$

Reguły komutacji (2.57)-(2.59) prowadzą do następujących relacji przemienności dla nowych generatorów

$$\begin{aligned} \left[J_i^+, J_j^+\right] &= i\,\epsilon_{ijk}\,J_k^+ \\ \left[J_i^-, J_j^-\right] &= i\,\epsilon_{ijk}\,J_k^- \\ \left[J_i^+, J_j^-\right] &= 0. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Ćwiczenie 10

Wyprowadzić relacje komutacji (2.72).

Identyfikacja ta oznacza, że możemy znaleźć różnowymiarowe reprezentacje grupy $SO(1,3)$ poprzez znane nieredukowalne reprezentacje grupy $SU(2)$. Jak wiemy są one numerowane wartością spinu $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Przestrzeń liniowa tych reprezentacji jest $2j+1$ wymiarowa z wektorami bazowymi określonymi przez warunek

$$J_3\,\psi_m = m\,\psi_m\,, \qquad\qquad m = -j, (-j+1), \dots (j-1), j\,. \tag{2.73}$$

Reprezentacje grupy Lorentza będą więc numerowane przez pary (j^+, j^-), a odpowiadająca im przestrzeń reprezentacji jest $(2j^+ + 1)(2j^- + 1)$ wymiarowa. Kolejne reprezentacje, rosnące względem wymiaru macierzy to

$$(0,0)\,,\ (\tfrac{1}{2},0)\,,\ (0,\tfrac{1}{2})\,,\ (1,0)\,,\ (0,1)\,,\ (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\,,\dots \tag{2.74}$$

Jednowymiarowa reprezentacja $(0,0)$ jest reprezentowana przez liczbę 1, a generatory $J_i^{\pm} = 0$.

Dwie następne reprezentacje tworzą nierównoważne dwuwymiarowe reprezentacje **spinorowe** grupy Lorentza, izomorficzne z grupą $SU(2)$. Generatory tej grupy, $\frac{1}{2}\sigma_i$, są zadane przez trzy macierze Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.75}$$

które spełniają ogólną relację

$$\sigma_i\,\sigma_j = \delta_{ij} + i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k\,. \tag{2.76}$$

Wynikają stąd następujące relacje

$$\sigma_i^2 \ = \ 1 \qquad\qquad i = 1,2,3 \tag{2.77}$$

$$\sigma_i\sigma_j \ = \ -\sigma_j\sigma_i \qquad\qquad i \neq j\,. \tag{2.78}$$

Ćwiczenie 11

Sprawdzić, że generatory $T_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ spełniają reguły komutacji dla grupy $SU(2)$

$$[T_i, T_j] = i\,\epsilon_{ijk}\,T_k \tag{2.79}$$

Tak więc, reprezentacji $(\frac{1}{2},0)$ odpowiadają generatory $J_i^+ = \frac{1}{2}\sigma_i$ oraz $J_i^- = 0$. Odwracając relacje (2.71) znajdziemy generatory grupy Lorentza:

$$J_i = \frac{1}{2}\,\sigma_i \qquad\qquad K_i = -\frac{i}{2}\,\sigma_i\,. \tag{2.80}$$

Podobnie, dla reprezentacji $(0,\frac{1}{2})$ generatory $J_i^+ = 0$ oraz $J_i^- = \frac{1}{2}\sigma_i$, natomiast

$$J_i = \frac{1}{2}\,\sigma_i \qquad\qquad K_i = \frac{i}{2}\,\sigma_i\,. \tag{2.81}$$

W obu przypadkach dwuwymiarowa przestrzeń reprezentacji jest rozpięta na obiektach ψ_m, gdzie $m=1,2$. Nazywa się je **spinorami Weyla** i wprowadza specjalne oznaczenie:

$$\phi_\alpha \;=\; \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \overline{\chi}^{\dot\alpha} = \begin{pmatrix} \overline{\chi}^1 \\ \overline{\chi}^2 \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

dla odpowiednio reprezentacji $(\frac{1}{2},0)$ oraz $(0,\frac{1}{2})$. Oznaczenia składowych spinorów: $\alpha, \dot\alpha = 1,2$ pozwalają skonstruować rachunek spinorowy, w analogii do rachunku tensorowego.

Podstawiając znalezione generatory do wzoru (2.53) znajdziemy prawo transformacyjne spinorów Weyla dla przekształceń Lorentza:

$$\begin{aligned} \phi' &= \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\,\phi\cdot\sigma+\frac{1}{2}\,\beta\cdot\sigma}\,\phi \\ \overline{\chi}' &= \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\,\phi\cdot\sigma-\frac{1}{2}\,\beta\cdot\sigma}\,\overline{\chi}. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Jak widzimy, spinory Weyla transformują się tak samo dla obrotów euklidesowych i różnią się *znakiem* przy boostach lorentzowskich.

Rozważając tylko obroty euklidesowe, znajdziemy macierz transformacji w postaci

$$\exp\left(-\tfrac{i}{2}\,\phi\cdot\sigma\right) = \cos\left(\tfrac{1}{2}\phi\right) - i\,\mathbf{n}\cdot\sigma\,\sin\left(\tfrac{1}{2}\phi\right), \tag{2.84}$$

gdzie wektor $\phi = \phi\mathbf{n}$ jest zadany przez kąt obrotu i jednostkowy wektor $\mathbf{n}$ określający oś obrotu. Wynika stąd, że przy przy obrocie o kąt $\phi = 2\pi$ spinory zmieniają znak !

Ćwiczenie 12

Udowodnić wzór (2.84) poprzez rozwinięcie eksponenty w szereg Taylora i pogrupowanie wyrazów względem parzystości potęg rozwinięcia.

Ćwiczenie 13

Udowodnić, że czterowymiarowa reprezentacja $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ odpowiada reprezentacji wektorowej grupy Lorentza z poprzedniego rozdziału.

Rozdział 3

Równanie Kleina-Gordona

Będziemy się starali skonstruować mechanikę kwantową jednej cząstki z symetrią lorentzowską, innymi słowy pogodzić podstawowe zasady mechaniki kwantowej z warunkiem niezmienniczości relatywistycznej. Jak zobaczymy nie jest to w pełni możliwe. Musimy zrezygnować z interpretacji jednocząstkowej i dopuścić możliwość kreacji i anihilacji cząstek, z niezachowaną ich całkowitą liczbą.

Podstawowymi elementami mechniki kwantowej są stany (tworzące przestrzeń liniową Hilberta) i działające na nie operatory liniowe. W 1923 roku de Broglie wysunął genialną idee, by stan swobodnej cząstki materialnej opisać zespoloną falą płaską,

$$\psi(\mathbf{x},t) \propto \exp\{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\} = \exp\{-i(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})/\hbar\}\,, \tag{3.1}$$

z Einsteinowską relacją między energią i pędem cząstki, a częstością i wektorem falowym fali:

$$E = \hbar\omega \qquad\qquad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}\,. \tag{3.2}$$

Działając na "falę materii" ψ operatorami różniczkowymi:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \;=\; E\psi \tag{3.3}$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\psi \;=\; \mathbf{p}\psi \tag{3.4}$$

otrzymujemy energię i pęd jako wartość własną tych operatorów. Stąd pomysł by przyporządkować operator z równania (3.3) operatorowi energii, a operator z równania (3.4) operatorowi pędu.

3.1 Nierelatywistyczne równanie falowe

Przepiszmy na początek klasyczną relację między energią i pędem swobodnej cząstki materialnej,

$$E = \frac{p^2}{2m}\,, \tag{3.5}$$

przy pomocy wprowadzonych operatorów:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^2\psi = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\psi\,. \tag{3.6}$$

Otrzymujemy w ten sposób podstawowe równanie dynamiczne nierelatywistycznej mechaniki kwantowej, równanie Schrödingera. Jego uogólnienie na przypadek cząstki oddziaływującej polega na dodaniu do prawej strony równania członu z klasycznym potencjałem:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\psi + V(\mathbf{x},t)\,\psi\,. \tag{3.7}$$

Użyta procedura (zwana kwantowaniem) jest heurezą, której słuszność może być potwierdzona tylko poprzez użyteczność otrzymanego w ten sposób równania do opisu mechaniki cząstek mikroświata.

Pomnóżmy obie strony równania (3.7) przez funkcję sprzężoną ψ^*, a równanie sprzężone zespolono,

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^* = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}\psi^* + V(\mathbf{x},t)\,\psi^*\,, \tag{3.8}$$

przez funkcję ψ. Następnie odejmujemy tak otrzymane równania od siebie stronami, otrzymując

$$\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi = \frac{-\hbar^2}{2mi\hbar}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\partial^2\psi^*}{\partial \mathbf{x}^2}\psi\right).$$

Łatwo sprawdzić, że powyższe równanie można zapisać w następujący sposób

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\psi = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left[\frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial\psi^*}{\partial \mathbf{x}}\psi\right)\right]. \tag{3.9}$$

Jest to równanie ciągłości

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{x}} \tag{3.10}$$

dla **dodatnio** określonej gęstości ρ i prądu $\mathbf{j}$:

$$\rho = \psi^*\psi \tag{3.11}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial\psi^*}{\partial \mathbf{x}}\psi\right). \tag{3.12}$$

Całkując obustronnie równanie (3.10) po kuli o promieniu R, otrzymamy

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{K_R} d^3\mathbf{x}\,\rho\right] = -\int_{K_R} d^3\mathbf{x}\,\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \mathbf{x}} = -\int_{S_R} d^2\mathbf{s}\cdot\mathbf{j}\,, \tag{3.13}$$

gdzie skorzystaliśmy w ostatniej równości z twierdzenia Stokesa. Przechodząc z R do nieskończoności i zakładając, że calka z gęstości istnieje (funkcja falowa ψ spada dostatecznie szybko) można pokazać, że prawa strona powyższego równania dąży do zera. Tak więc udowodniliśmy, iż całka po całej przestrzeni z dodatnio określonej gęstości jest zachowana

$$\int d^3\mathbf{x}\, \psi^*(\mathbf{x},t)\, \psi(\mathbf{x},t) = \text{const}\,. \tag{3.14}$$

Możemy więc interpretować $\psi^*\psi$ (po unormowaniu) jako gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w przestrzeni, a całkę (3.14) jako całkowite prawdopodobieństwo, zachowane w czasie.

3.2 Relatywistyczne równanie falowe

Powtórzmy rozumowanie z poprzedniego rozdziału dla przypadku relatywistycznej cząstki swobodnej. Klasyczny związek miedzy energią a pędem ma w tym wypadku następującą postać:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4\,. \tag{3.15}$$

Zastępując liczby operatorami dostaniemy

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \phi = c^2 \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^2 \phi + m^2 c^4 \phi$$

i ostatecznie

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\phi = 0\,. \tag{3.16}$$

Jest to relatywistyczne równanie falowe Kleina–Gordona. Zbadajmy czy dopuszcza ono interpretację probabilistyczną funkcji ϕ.

Podobnie jak poprzednio, mnożymy równanie (3.16) przez ϕ^*, a jego zespolono sprzeżoną wersję przez ϕ, a następnie odejmujemy tak otrzymane równania od siebie stronami otrzymując

$$\frac{1}{c^2}\left(\phi^*\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2}\phi\right) = \phi^*\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \mathbf{x}^2}\phi\,,$$

co można zapisać w następujący sposób

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^*\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\phi\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left[c^2\left(\phi^*\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{x}}\phi\right)\right]. \tag{3.17}$$

Równanie to ma formę równania ciągłości (3.10) po identyfikacji

$$\rho \;=\; i\left(\phi^*\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\phi\right) \tag{3.18}$$

$$\mathbf{j} \;=\; -ic^2\left(\phi^*\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{x}}\phi\right), \tag{3.19}$$

gdzie czynnik zespolony i został wprowadzony by ρ i $\mathbf{j}$ były rzeczywiste.

Podobnie jak w przypadku nierelatywistycznym, całka po trójwymiarowej przestrzeni z ρ jest zachowana. Nie można jej niestety interpretować probabilistycznie, gdyż gęstość (3.18) **nie jest** dodatnio określona i nie może być interpretowana jako gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w przestrzeni. Podsumowując, relatywistyczne równanie falowe (3.16) nie prowadzi do interpretacji probablistycznej ϕ jako kwantowomechanicznej funkcji falowej. Jak zobaczymy w rozdziale 7, równanie Kleina–Gordona odzyskuje swoje znaczenie w kwantowej teorii pola, gdzie opisuje cząstki o spinie 0.

Rozdział 4

Równanie Diraca

4.1 Wyprowadzenie Diraca

Przyczyną, dla której nie udało sie skontruować dodatnio okrełonej gęstości są drugie pochodne w równaniu Kleina–Gordona. Dirac zaproponował następujące równanie pierwszego rzędu w pochodnych po czasie i przestrzeni, którego “kwadrat” prowadzi do równania Kleina–Gordona

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2)\,\psi\,, \tag{4.1}$$

gdzie $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\partial/\partial\mathbf{x}$ jest operatorem pędu, natomiast $\alpha = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_3)$ oraz β są nieznanymi na razie obiektami, które mogą być nieprzemienne. Równanie to ma postać równiania Schroedingera z hamiltonianem

$$H = c\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2\,. \tag{4.2}$$

Działając operatorem $i\hbar\partial/\partial t$ po obu stronach równania (4.1), otrzymujemy

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (c\alpha \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2)^2\,\psi\,.$$

Obliczając kwadrat operatora po prawej stronie pamiętając, że występujące tam wielkości mogą być nieprzemienne, znajdujemy

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left\{ c\,\frac{\alpha_i\,\alpha_j + \alpha_j\,\alpha_i}{2}\,\hat{\mathbf{p}}_i\,\hat{\mathbf{p}}_j + mc^3\,(\alpha_i\,\beta + \beta\,\alpha_i)\,\hat{\mathbf{p}}_i + \beta^2\,m^2c^4 \right\}\psi\,,$$

co prowadzi do równania Kleina-Gordona (3.16) dla funkcji ψ pod warunkiem, że α i β spełniają związki

$$\alpha_i\,\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\,, \qquad \alpha_i\,\beta + \beta\,\alpha_i = 0\,, \qquad \beta^2 = 1\,. \tag{4.3}$$

Obiektami spełniającymi reguły (4.3) są macierze o najmniejszym wymiarze 4×4, na które dodatkowo nakładamy warunek hermitowskości

$$\beta^\dagger = \beta\,, \qquad \alpha^\dagger = \alpha\,, \tag{4.4}$$

tak by hamiltonian Diraca generował unitarną ewolucję czasową.

W takim wypadku funkcja ψ jest obiektem czteroskładnikowym – bispinorem Diraca:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Dwie najbardziej popularne reprezentacje macierzy α i β to

- *reprezentacja Diraca* (D)*:*

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

  gdzie 1 jest dwuwymiarową macierzą jednostkową, natomiast σ^k są trzema dwuwymiarowymi macierzami Pauliego (2.75),

- *reprezentacja chiralna*

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Ćwiczenie 14
Sprawdzić, że macierze α^k i β spełniają relacje (4.3).

Równanie Diraca ((4.1)) prowadzi do równania ciągłości (3.10) z dodatnio określoną gęstością $\rho = \psi^+\psi$ i prądem $\mathbf{j} = c\psi^+\alpha\psi$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^+\psi\right) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(c\psi^+\alpha\psi\right). \tag{4.8}$$

Tym samym ψ można nadać interpretację probabilistyczną: $\psi^+\psi$ jest gęstością prawdopodobieństwa, a $\int d^3\mathbf{x}\,\psi^+\psi$ jest zachowanym całkowitym prawdopodobieństwem.

Ćwiczenie 15
Wyprowadzić równanie (4.8) wychodząc z równania (4.1) i korzystając z hermitowskości macierzy α^k i β.

Równanie Diraca ma dla ustalonego pędu $\mathbf{p}$ cztery rozwiązania w postaci fali płaskiej (3.1): dwa z dodatnią wartością energii $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$ i dwa z ujemną wartością energii $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$. W związku z istnieniem rozwiązań o ujemnej energii pojawia się problem ich interpretacji, istniejący również dla równania Kleina–Gordona. Cząstki o dodatniej energii oddziaływując z promieniowaniem powinny przechodzić do stanów o ujemnej energii wyzwalając ogromną ilość energii. Materia jest jednak stabilna i takich przejść się nie obserwuje. Dirac zaproponował rozwiązanie tego problemu poprzez wypełnienie wszystkich stanów o ujemnej energii elektronami spełniającymi zakaz Pauliego.

W takiej sytuacji żaden elektron o dodatniej energii nie może przejść do stanu o ujemnej energii.

Postuluje się, że tak określony stan o najniższej energii (próżnia Diraca) nie wpływa na własności obserwowanego wszechświata mając zerową energię i ładunek. Na skutek oddziaływania z promieniowaniem (o energii $E > 2mc^2$) elektrony z próżni mogą byc wzbudzone do stanu o dodatniej energii. Jednocześnie próżnia, tracąc ladunek $-e$ i ujemną energię, zachowuje się jak antycząstka (dziura) o dodatnim ładunku e i dodatniej energii. Tak więc foton promieniowania wykreował parę elektron-pozytron o dodatnich energiach. Podsumowując, sprzęgnięcie równania Diraca z promieniowaniem wyprowadza poza jednocząstkową mechanikę kwantową poprzez procesy kreacji i anihilacji cząstek. Ich całkowita liczba nie jest zachowana.

Rozwiązanie z próżnią Diraca nie stosuje się do cząstek o spinie zero, bozonów. Nie można więc traktować antycząstek jako dziur w próżni bozonowej. Cząstki takie jednak istnieją, są to na przykład mezony $\pi^{\pm}$. Niezbędny jest więc relatywistycznie niezmienniczy opis procesów kwantowch, w którym cząstki i antycząstki są traktowane symetrycznie, i który w sposób naturalny dopuszcza kreację i anihilację cząstek bez uciekania się do tak sztucznej konstrukcji jak próżnia Diraca. Opis taki dostarcza *kwantowa teoria pola.*

4.2 Równania Weyla

Kładąc $m = 0$ w równaniu (4.1) z macierzami α i β w reprezentacji chiralnej otrzymujemy dwa *niezależne* równania Weyla:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} &= c\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}\, \phi \\ i\hbar \frac{\partial \overline{\chi}}{\partial t} &= -c\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}\, \overline{\chi}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

gdzie ϕ oraz $\overline{\chi}$ są dwuskładnikowymi spinorami Weyla (2.82), co udowodnimy w rozdziale 5.1.

Równania Weyla można także otrzymać zauważając, że $m = 0$ w równaniu Diraca eliminuje z rozważań β. Istotny jest wtedy tylko pierwszy ze związków (4.3) dla trzech macierzy α. Jest on spełniony przez trzy dwuwymiarowe macierze Pauliego σ (2.75), gdyż z relacji (2.76) wynika

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\,\delta_{ij}\,. \tag{4.10}$$

Związek ten jest również słuszny dla macierzy $-\sigma$. Stąd otrzymujemy dwa niezależne równania (4.9).

W przeciwieństwie do równania Diraca, równania Weyla nie są one niezmiennicze względem odbić przestrzennych: $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ i w związku z tym zostały zaakceptowane dopiero po odkryciu łamania parzystości P przez oddziaływania słabe, opisując bezmasowe neutrina o określonej skrętności.

4.3 Niezmienniczość Lorentza równania Diraca

Aby znaleźć jawnie niezmienniczą postać równania Diraca pomnóżmy równanie (4.1) z lewej strony przez macierz β

$$i\hbar\beta\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\hbar c\,\beta\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} + mc^2)\,\psi\,. \tag{4.11}$$

Wprowadźmy następnie macierze gamma Diraca $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$:

$$\gamma^0 = \beta\,, \qquad\qquad \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha}\,. \tag{4.12}$$

Dzieląc obie strony równania (4.11) przez $\hbar c$ oraz wykorzystując definicję gradientu $\partial_\mu = (\partial_{ct}, \partial_{\mathbf{x}})$, otrzymujemy następującą postać równania Diraca

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0\,. \tag{4.13}$$

Przedyskutujmy własności macierzy gamma. Korzystając z relacji (4.3) otrzymujemy nast-"„-aą-eę-AĄ-EĘ-lł-LŁ-oó-OÓ-cć-CĆ-nń-NŃ-sś-SŚ-xź-XŹ-zż-ZŻepujące reguły *antykomutacji*

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\,g^{\mu\nu}\,. \tag{4.14}$$

gdzie $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Macierze β i $\boldsymbol{\alpha}$ są hermitowskie, a więc dla macierzy gamma zachodzi

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \qquad\qquad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \tag{4.15}$$

co prowadzi do ogólnej relacji

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\,. \tag{4.16}$$

Dla dwóch najbardziej popularnych reprezentacji (4.6) i (4.7) znajdujemy:

- *reprezentacja Diraca* (D)*:*

$$\gamma^0_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \gamma^k_D = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

- *reprezentacja chiralna* (C)*:*

$$\gamma^0_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \gamma^k_C = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

W $3+1$ wymiarach wszystkie reprezentacje macierzy gamma są *unitarnie równoważne*. Na przykład, dla powyższych reprezentacji istnieje unitarna macierz U taka, że zachodzi

$$\gamma^\mu_D = U\,\gamma^\mu_C\,U^\dagger\,. \tag{4.19}$$

Ćwiczenie 16
Pokazać, że unitarna macierz transformacji we wzorze (4.19) to

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Po tym przygotowaniu możemy powrócić do głównego problemu. Równanie (4.13) jest niezmiennicze względem właściwych ortochronicznych przekształceń Lorentza pod warunkiem, że ψ transformuje się w następujący sposób

$$\psi'(x') = S(L)\,\psi(x)\,, \tag{4.21}$$

gdzie $S(L)$ jest nieosobliwą, czterowymiarową macierzą, niezależną od punktów czasoprzestrzeni.

Aby znaleźć postać tej macierzy pomnóżmy (4.13) przez $S(L)$ z lewej strony oraz wykorzystajmy związek $\partial_\mu = L^\alpha{}_\mu \partial'_\alpha$,

$$\left(i\,\underbrace{S\gamma^\mu S^{-1} L^\alpha{}_\mu}\,\partial'_\alpha - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'(x') = 0\,. \tag{4.22}$$

Otrzymane równanie ma postać równania Diraca w zmiennych primowanych pod warunkiem, że podkreślone wyrażenie jest równe γ^α,

$$S(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S^{-1}(\Lambda)\,L^\alpha{}_\mu = \gamma^\alpha\,. \tag{4.23}$$

Innymi słowy, macierze S muszą spełniać równoważną relację

$$S^{-1}(L)\,\gamma^\alpha\,S(L) = L^\alpha{}_\mu\gamma^\mu\,. \tag{4.24}$$

Wzór ten definiuje reprezentację bispinorową grupy Lorentza, gdyż dla dowolnych przekształceń Lorentza L_1, L_2 zachodzi

$$S(L_1)\,S(L_2) = S(L_1 L_2)\,. \tag{4.25}$$

Ćwiczenie 17
Udowodnić relację (4.25) i pokazać, że zbiór macierzy $S(L)$ tworzy reprezentację grupy Lorentza.

W następnym rozdziale skonstruujemy macierze $S(L)$, które spełniaja związek (4.24), warunkujący niezmienniczość Lorentza równania Diraca. Tym samym, znajdziemy prawo transformacyjne dla bispinorów Diraca.

Rozdział 5

Bispinory Diraca

5.1 Bispinorowa transformacja Lorentza

Poszukajmy macierz $S(L)$, ktoa spełnia związek (4.24), w następującej postaci

$$S(L) = \exp\left\{-\tfrac{i}{4}\,\omega_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu}\right\}, \tag{5.1}$$

gdzie $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ są 6-oma rzeczywistymi parametrami (2.61) transformacji Lorentza, natomiast

$$\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} \tag{5.2}$$

jest układem 6-u macierzy 4×4, których postać chcemy znaleźć.

Rozważmy w tym celu infinitezymalne przekształcenie Lorentza (2.15), dla którego $\omega_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} \ll 1$. Odpowiadająca mu macierz spinorowa to

$$S = 1 - \tfrac{i}{4}\,\epsilon_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu} \qquad\qquad S^{-1} = 1 + \tfrac{i}{4}\,\epsilon_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu}\,. \tag{5.3}$$

Po podstawieniu do warunku (4.24) otrzymujemy

$$(1 + \tfrac{i}{4}\,\epsilon_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu})\,\gamma^{\alpha}\,(1 - \tfrac{i}{4}\,\epsilon_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu}) = (\delta^{\alpha}_{\ \nu} + \epsilon^{\alpha}_{\ \nu})\gamma^{\nu}\,. \tag{5.4}$$

Porównując wyrażenia pierwszego rzędu w ϵ po obu stronach, dostajemy

$$[\gamma^{\alpha}, \sigma^{\mu\nu}] = 2i\,(g^{\alpha\mu}\gamma^{\nu} - g^{\alpha\nu}\gamma^{\mu})\,. \tag{5.5}$$

Warunek antysmetrii (5.2) prowadzi do wniosku, że $\sigma^{\mu\nu} = c[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$. Współczynnik proporcjonalności c wyznaczymy z warunku (5.5). Policzmy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}[\gamma^{\alpha}, \sigma^{\mu\nu}] &= \gamma^{\alpha}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) - (\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})\,\gamma^{\alpha} \\
&= (\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\mu}\underbrace{\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}}) - (\underbrace{\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu}}\gamma^{\mu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha}) \\
&= (\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\alpha})\gamma^{\nu} - 2\,g^{\alpha\nu}\gamma^{\mu} + \gamma^{\nu}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma^{\alpha}) - 2\,g^{\alpha\nu}\gamma^{\mu} \\
&= 4\,g^{\alpha\mu}\gamma^{\nu} - 4\,g^{\alpha\nu}\gamma^{\mu}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Stąd znajdujemy $4c = 2i$ i ostatecznie

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,. \tag{5.7}$$

Korzystując z relacji (4.16) łatwo udowodnić związek

$$(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0\,\sigma^{\mu\nu}\,\gamma^0\,, \tag{5.8}$$

który zapisać można dla składowych

$$(\sigma^{0i})^\dagger = -\sigma^{0i}\,, \qquad\qquad (\sigma^{ik})^\dagger = \sigma^{ik}\,. \tag{5.9}$$

Ćwiczenie 18
Udowodnić relacje (5.8) i (5.9).

Porównując postać (5.1) transformacji Lorentza z postacią (2.62) dla transformacji wektorowej widzimy, że macierze

$$J^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\,\sigma^{\mu\nu} = \tfrac{i}{4}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{5.10}$$

są spinorowymi generatorami transformacji Lorentza. Obroty euklidesowe wokól osi $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ są generowane przez operatory

$$S_i = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} J^{jk} = \tfrac{1}{4}\,\epsilon_{ijk}\,\sigma^{jk}\,. \tag{5.11}$$

Ze względu na warunek hermitowskości macierzy σ^{jk} (drugi ze zwiazków (5.9)) jest to operator hermitowski i spinorowa transformacja obrotów euklidesowych jest realizowana przez operator unitarny. Podobnie, pchnięcia lorentzowskie wzdłuż tych samych osi są generowane przez

$$K_i = J^{0i} = \tfrac{1}{2}\,\sigma^{0i} = \tfrac{i}{2}\gamma^0\gamma^i\,. \tag{5.12}$$

Tym razem nie są to operatory hermitowskie ze względu na własność anthyhermitowskości macierzy σ^{0i}. Spinorowe operatory pchnięć nie są więc operatorami unitarnymi.

Generatory S_i oraz K_i spełniają algebrę Liego grupy Lorentza

$$\begin{aligned} [\,S_i, S_j\,] &= i\,\epsilon_{ijk}\,S_k \\ [\,S_i, K_j\,] &= i\,\epsilon_{ijk}\,K_k \\ [\,K_i, K_j\,] &= -i\,\epsilon_{ijk}\,S_k\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Macierze S_i spełniają algebrę grupy trójwymiarowych obrotów. Identyfikujemy je jako operatory wewnętrznego krętu cząstki Diraca – spinu. Licząc wartość spinu s z relacji

$$\mathbf{S}^2 = s(1+s) = \tfrac{1}{4}\left\{(\sigma^{23})^2 + (\sigma^{31})^2 + (\sigma^{12})^2\right\} = \tfrac{3}{4}\,, \tag{5.14}$$

przekonujemy się, że **spin** $s = \frac{1}{2}$ dla cząstki Diraca.

Ćwiczenie 19
Sprawadzić, że słuszne są relacje komutacji (5.13). Znaleźć jawną postać generatorów w reprezentacji Diraca.

Wprowadzając parametry ϕ oraz β zgodnie z definicją (2.61), dostaniemy dla transformacji bispinorowej

$$S(L) = \exp\left(-i\phi\cdot\mathbf{S} - i\beta\cdot\mathbf{K}\right). \tag{5.15}$$

Podsumujmy, że z własności (5.9) wynika

$$\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{S}, \qquad \mathbf{K}^\dagger = -\mathbf{K}. \tag{5.16}$$

Tak więc macierz transformacji spinorowej $S(L)$ jest macierzą unitarną tylko dla obrotów euklidesowych. W ogólności otrzymujemy

$$S^\dagger(L)\,\gamma^0 = \gamma^0\,S^{-1}(L), \tag{5.17}$$

gdyż na podstawie (5.8) zachodzi

$$S^\dagger(L) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu}}\right)^\dagger = \mathrm{e}^{\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\,(\sigma^{\mu\nu})^\dagger} = \gamma_0\,\mathrm{e}^{\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu}}\gamma_0 = \gamma_0\,S^{-1}(L)\,\gamma_0\,.$$

Dla obrotów euklidesowych można przestawić γ_0 w relacji (5.17) i otrzymać warunek unitarności dla genertorów obrotów **S**.

Ćwiczenie 20
Korzystając ze wzoru (7.40) i relacji komutacji (5.5) pokazać, że

$$S(L) = \exp\{-\tfrac{i}{2}\,\beta\,\sigma^{01}\} \tag{5.18}$$

generuje boost wzdłuż osi $\hat{1}$ z prędkościa β (porównaj Ćwiczenie 9):

$$\begin{aligned} S^{-1}(L)\,\gamma^0\,S(L) &= \gamma^0\cosh\beta + \gamma^1\sinh\beta \\ S^{-1}(L)\,\gamma^1\,S(L) &= \gamma^0\sinh\beta + \gamma^1\cosh\beta\,. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 21
Podobnie udowodnić, że transformacja

$$S(L) = \exp\{-\tfrac{i}{2}\,\phi\,\sigma^{23}\} \tag{5.19}$$

generuje obrót w płaszczyźnie $(\hat{2}\hat{3})$ o kąt ϕ:

$$\begin{aligned} S^{-1}(L)\,\gamma^2\,S(L) &= \gamma^2\cos\phi - \gamma^3\sin\phi \\ S^{-1}(L)\,\gamma^3\,S(L) &= \gamma^2\sin\phi + \gamma^3\cos\phi\,. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 22
Udowodnić, że transformacja (5.19) zmienia znak przy obrocie o kąt $\phi = 2\pi$.

Zmiana znaku bispinora jest związana z kwadratową relacją (4.24) pomiędzy macierzami reprezentacji spinorowej grupy Lorenzta $S(L)$ a przekształceniem Lorentza L. Stąd zmiana znaku $S(L)$ przy obrocie o kąt 2π nie wpływa na macierz L. Spinor powraca do wyjściowej wartości dopiero po obrocie o kąt 4π. W ten sposób każdemy przekształceniu Lorentza odpowiadają dwie macierze $\pm S(L)$ i reprezentacja bispinorowa dwukrotnie nakrywa grupę Lorentza.

5.2 Bispinory Diraca a spinory Weyla

Interesujący jest związek bispinorów Diraca z dwuskładnikowymi spinorami Weyla (2.82). Rozważmy reprezentację chiralną (4.18) macierzy Diraca. W reprezentacji tej generatory spinu **S** i boostu **K** są kwasidiagonalne:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

W takim przypadku macierz transformacji bispinorowej (5.15) przyjmuje postać

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\phi\cdot\sigma + \frac{1}{2}\beta\cdot\sigma} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\phi\cdot\sigma - \frac{1}{2}\beta\cdot\sigma} \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Widzimy, że dwie górne i dwie dolne składowe bispinora Diraca w reprezentacji chiralnej,

$$\psi_C = \begin{pmatrix} \phi \\ \overline{\chi} \end{pmatrix}, \tag{5.22}$$

transformują się zgodnie z regułami (2.83) dla spinorów Weyla. Stąd wynika uzasadnienie dla nazwy *bispinor*.

Ćwiczenie 23
Korzystając z postaci macierzy (4.19) pokazać, że w reprezentacji Diraca zachodzi

$$\psi_D = U\,\psi_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi + \overline{\chi} \\ \phi - \overline{\chi} \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

5.3 Dwuliniowe kombinacje spinorowe

Zdefiniujmy najpierw macierz

$$\gamma_5 \equiv \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{5.24}$$

Z relacji (4.14) i (4.16) wynikają następujące związki:

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \qquad (\gamma_5)^2 = 1 \qquad \gamma_5\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_5 = 0\,. \tag{5.25}$$

W reprezentacjach (4.6) oraz (4.7) macierzy Diraca, γ^5 przyjmuje następującą postać:

- *reprezentacja Diraca*

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

- *reprezentacja chiralna*

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

Macierz γ_5 spełnia natępujący związek

$$S^{-1}(L)\,\gamma^5\,S(L) = \det(L)\,\gamma^5\,. \tag{5.28}$$

Aby go udowodnić, zapiszmy γ^5 w formie

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\,\epsilon_{\mu\nu\mu\nu}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\,, \tag{5.29}$$

a następnie rozważmy

$$\begin{aligned}
S^{-1}\gamma_5\,S &= -\frac{i}{4!}\,\epsilon_{\mu\nu\mu\nu}\,S^{-1}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\,S \\
&= -\frac{i}{4!}\,\epsilon_{\mu\nu\mu\nu}\,(S^{-1}\gamma^\mu S)\,(S^{-1}\gamma^\nu S)\,(S^{-1}\gamma^\alpha S)\,(S^{-1}\gamma^\beta S) \\
&= -\frac{i}{4!}\,\epsilon_{\mu\nu\mu\nu}\,L^\mu{}_{\mu'}\,L^\nu{}_{\nu'}\,L^\alpha{}_{\alpha'}\,L^\beta{}_{\beta'}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\alpha'}\gamma^{\beta'} \\
&= -\frac{i}{4!}\det(L)\,\epsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'}\,\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\alpha'}\gamma^{\beta'} = \det(L)\,\gamma^5\,.
\end{aligned}$$

W dowodzie wpisaliśmy $SS^{-1} = 1$ pomiędzy każdą z macierzy gamma, a następnie wykorzystaliśmy wzór (4.24) oraz prawo transformacyjne (2.43).

Ćwiczenie 24

Sprawdzić relacje (5.25) oraz wyprowadzić postać (5.26) i (5.27).

Wzór (5.17) pozwala udowodnić, że poniższe biliniowe formy, zwane *prądami*, transformują się odpowiednio jak skalar (S), wektor (V), tensor (T), pseudoskalar (P) i pseudowektor (A):

$$\begin{aligned}
S:&\quad \overline{\psi}\psi = j &&\to\quad j' = j && (5.30)\\
V:&\quad \overline{\psi}\gamma^\mu\psi = j^\mu &&\to\quad j'^\mu = L^\mu{}_\nu\, j^\nu && (5.31)\\
T:&\quad \overline{\psi}\,\sigma^{\mu\nu}\psi = j^{\mu\nu} &&\to\quad j'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\alpha\, L^\nu{}_\beta\, j^{\mu\nu} && (5.32)\\
P:&\quad \overline{\psi}\,\gamma^5\psi = j^5 &&\to\quad j'^5 = \det(L)\, j^5 && (5.33)\\
A:&\quad \overline{\psi}\,\gamma^\mu\gamma^5\psi = j^\mu_A &&\to\quad j'^\mu_A = \det(L)\, L^\mu{}_\nu\, j^\nu_A\,. && (5.34)
\end{aligned}$$

Rozważmy prąd wektorowy V. Udowodnimy na jego przykładzie tensorowy charakter pierwszych trzech prądów:

$$\overline{\psi'}\gamma^\mu\psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu S \psi = \psi^\dagger \gamma^0 (S^{-1}\gamma^\mu S)\psi = L^\mu{}_\nu (\overline{\psi}\gamma^\nu\psi), \qquad (5.35)$$

gdzie wykorzystaliśmy najpierw własność (5.17), a następnie (4.24).

Aby uzasadnić pseudotensorowy charakter dwóch ostatnich prądów wykorzystamy związek (5.28). Na przykład, dla pseudoskalara S otrzymamy

$$\overline{\psi'}\gamma^5\psi' = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0\gamma^5 S\psi = \psi^\dagger\gamma^0(S^{-1}\gamma^5 S)\psi = \det(L)\,\overline{\psi}\gamma^5\psi. \qquad (5.36)$$

Obecność wyznacznika powoduje, że przy odbiciach z $\det(L) = -1$, pseudoskalar zmienia znak na przeciwny. Podobnie zachowują się składowe prądu axialnego, tworzące pseudowektor j_5^μ.

Macierze

$$\Gamma = \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma^5, \gamma^5\} \qquad (5.37)$$

tworzą układ zupełny 16 macierzy w przestrzeni liniowej macierzy 4×4 o współczynnikach zespolonych. Tak więc, dowolna macierz O z tej przestrzeni może by przedstawiona jako kombinacja liniowa macierzy Γ. W szczególności, najogólniejsza postać biliniowej kombinacja bispinorów może byc rozłożona w bazie prądów (5.30)–(5.34).

$$\overline{\psi}O\psi = c\,j + c_\mu j^\mu + c_{\mu\nu} j^{\mu\nu} + c_\mu^A\, j_A^\mu + c^5 j^5. \qquad (5.38)$$

Jak pokazuje doświadczenie, prądy naładowane oddziaływań słabych mają strukturę $V - A$, czyli

$$l^\mu = j^\mu - j_A^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi. \qquad (5.39)$$

Ćwiczenie 25

Udowodnić pozostałe reguły transformacyjne dla prądów.

Ćwiczenie 26

Udowodnić wykorzystując równanie Diraca, że prąd wektorowy jest zachowany

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right) = 0. \qquad (5.40)$$

Znaleźć składowe tego prądu i porównać z równaniem ciągłości (4.8). Prąd j^μ jest więc *prądem prawdopodobieństwa* dla równania Diraca.

Ćwiczenie 27

Pokazać, że gdy masa w równaniu Diraca jest równa zeru, to zachowany jest również *prąd aksjalny*:

$$\partial_\mu j_A^\mu = \partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\right) = 2im\overline{\psi}\gamma^5\psi = 0. \qquad (5.41)$$

5.4 Spinory chiralne

Macierz γ^5 pełni rolę operatora chiralności. Z własności $(\gamma^5)^2 = 1$ oraz hermitowskości wynika, że jego wartości własne (zwane chiralnością) wynoszą ± 1,

$$\gamma^5 \psi_\pm = \pm \psi_\pm . \tag{5.42}$$

Wektory własne $\psi_\pm$ są nazywane *bispinorami chiralnymi (lub bispinorami Weyla)*. Chiralność jest niezmiennikiem transformacji Lorentza , gdyż

$$[\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0 \qquad => \qquad [\gamma^5, S(L)] = 0 . \tag{5.43}$$

dla dowolnej transformacji Lorentza L. Tak więc przetransformowany bispinor

$$\psi'_\pm = S(L)\psi_\pm \tag{5.44}$$

spełnia równanie (5.42) dla tych samych wartości chiralności.

Dowolny bispinor można rozłożyć na sumę bispinorów o przeciwnych chiralnościach przy pomocy operatorów:

$$P_\pm = \tfrac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) . \tag{5.45}$$

Zachodzi bowiem

$$\gamma^5 P_\pm = \pm P_\pm , \tag{5.46}$$

skąd wynika, że

$$\psi_\pm = P_\pm \psi . \tag{5.47}$$

Operatory $P_\pm$ są ortogonalnymi operatorami rzutowymi

$$(P_\pm)^\dagger = P_\pm \qquad (P_\pm)^2 = P_\pm \qquad P_+ P_- = P_- P_+ = 0 . \tag{5.48}$$

Rozkładają one przestrzeń liniową bispinorów na sumę prostą dwóch podprzestrzeni o określonej chiralności, gdyż

$$P_+ + P_- = 1 \tag{5.49}$$

i wtedy dla dowolnego bispinora otrzymujemy

$$\psi = (P_+ + P_-)\psi = (P_+ \psi) + (P_- \psi) = \psi_+ + \psi_- . \tag{5.50}$$

Ćwiczenie 28

Udowodnić własności (5.46) – (5.50).

Rzutując równanie Diraca (4.13) na podprzestrzenie o określonej chiralności i korzystając z własności

$$P_\pm \gamma^\mu = \gamma^\mu P_\mp , \tag{5.51}$$

dostaniemy (po położeniu $\hbar = c = 1$)

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_+ - m\psi_- = 0 \tag{5.52}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_- - m\psi_+ = 0 \tag{5.53}$$

Tak więc, niezerowa masa miesza bispinory o różnych chiralnościach.

Ćwiczenie 29
Udowodnić, że w reprezentacji chiralnej spinory o określonej chiralności to

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{5.54}$$

Bispinory chiralne mają więc o połowę mniej składowych rzeczywistych niż bispinory Diraca.

5.5 Chiralność a skrętność

W przypadku bezmasowym równania Diraca (5.52) rozpadaja się na dwa niezależne równania dla bispinorów chiralnych

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\pm(x) = 0\,. \tag{5.55}$$

Podstawiając rozwiązanie w postaci fal płaskich

$$\psi_\pm(x) = \tilde{\psi}_\pm(k)\, \mathrm{e}^{-i(k^0 t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\,, \tag{5.56}$$

znajdziemy

$$(\gamma^0 k^0 - \gamma\cdot\mathbf{k})\, \tilde{\psi}_\pm(k) \,=\, 0\,. \tag{5.57}$$

Mnożąc obie strony równania przez $(\gamma^0 k^0 - \gamma\cdot\mathbf{k})$, otrzymamy po wykorzystaniu reguł komutacji (4.14):

$$\left\{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2\right\} \tilde{\psi}_\pm(k) = 0\,. \tag{5.58}$$

Niezerowe rozwiązania powyższego równania istnieją dla $k^0 = \pm|\mathbf{k}|$.

Wybierając rozwiązanie z dodatnią wartością k^0, zapiszemy równanie (5.57) w postaci

$$\frac{\gamma^0 \gamma\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\, \tilde{\psi}_\pm(k) \,=\, \tilde{\psi}_\pm(k)\,. \tag{5.59}$$

Zdefiniujmy następnie *operator skrętności*, czyli rzutu spinu na kierunek pędu cząstki,

$$h = 2\,\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\,, \tag{5.60}$$

gdzie operator spinu $\mathbf{S}$ jest zdefiniowany we wzorze (5.11), a czynnik 2 jest wygodną konwencją. Operator ten można zapisać przy pomocy macierzy gamma,

$$h = \frac{i}{|\mathbf{k}|}\left(k^1\gamma^2\gamma^3 + k^2\gamma^3\gamma^1 + k^3\gamma^1\gamma^2\right)\,. \tag{5.61}$$

Obliczmy następujące wyrażenie

$$\begin{aligned}\gamma_5 h &= \frac{i}{|\mathbf{k}|}\Big(k^1\gamma_5\gamma^2\gamma^3 + k^2\gamma_5\gamma^3\gamma^1 + k^3\gamma_5\gamma^1\gamma^2\Big)\\ &= \frac{i}{|\mathbf{k}|}\Big(k^1(-i\gamma^0\gamma^1) + k^2(-i\gamma^0\gamma^2) + k^3(-i\gamma^0\gamma^3)\Big) = \frac{\gamma^0\gamma\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\,.\end{aligned}$$

Tak więc równanie (5.59) można zapisać w postaci

$$\gamma_5 h\,\tilde{\psi}_\pm(k) = \tilde{\psi}_\pm(k)\,. \tag{5.62}$$

Mnożąc z lewej strony przez γ_5, otrzymujemy:

$$h\,\tilde{\psi}_\pm = \gamma_5\,\tilde{\psi}_\pm = \pm\,\tilde{\psi}_\pm\,. \tag{5.63}$$

Widzimy, że w przypadku bezmasowym spinory chiralne spełniające równanie Weyla są stanami własnymi operatora skrętności. Stąd dla rozwiązań z dodatnią energią $k^0 = |\mathbf{k}|$ (cząstek) zachodzi:

$$\text{CHIRALNOŚĆ} = \text{SKRĘTNOŚĆ}\,.$$

Łatwo sprawdzić, że wybór $k^0 = -|\mathbf{k}|$ w równaniu (5.57) (antycząstek) prowadzi do związku:

$$\text{CHIRALNOŚĆ} = -\,\text{SKRĘTNOŚĆ}\,.$$

W obu przypadkach równania Weyla opisują bezmasowe cząstki o określonej skrętności. Masowe spinory chiralne nie mają określonej skrętności. Można ją bowiem zmienić przy pomocy transformacji Lorentza, w przeciwieństwie do chiralności, która jest niezmiennikiem tej transformacji.

Ćwiczenie 30

Pokazać, wykonując obrót wokół kierunku pędu $\mathbf{k}$, że spinory spełniające równania Weyla "kręcą się w przeciwne strony", tzn. pod wpływem obrotu o kąt ϕ, zachodzi

$$\phi_+ \;\to\; \mathrm{e}^{-i\phi/2}\,\phi_+ \qquad\qquad \phi_- \;\to\; \mathrm{e}^{i\phi/2}\,\phi_-\,. \tag{5.64}$$

5.6 Odbicie przestrzenne bispinora

Rozważmy operację odbicia przestrzennego $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ wraz z towarzyszącą jej transformacją spinora

$$\psi^P(t,\mathbf{x}) = P\,\psi(t,-\mathbf{x})\,, \tag{5.65}$$

gdzie P jest macierzą, którą należy znaleźć z warunku niezmienniczości równania Diraca względem tej operacji.

Dokonując transformacji $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ w równaniu Diraca

$$\Big\{i\gamma^0\partial_t + i\gamma\cdot\partial_{\mathbf{x}} - m\Big\}\,\psi(t,\mathbf{x}) = 0 \tag{5.66}$$

otrzymujemy

$$\Big\{i\gamma^0\partial_t - i\boldsymbol{\gamma}\cdot\partial_{\mathbf{x}} - m\Big\}\,\psi(t,-\mathbf{x}) = 0\,. \tag{5.67}$$

Zauważmy, że jeśli macierze $(\gamma^0,\boldsymbol{\gamma})$ spełniają algebrę Clifforda (4.14) to spełniają ją również macierze $(\gamma^0,-\boldsymbol{\gamma})$. W czterowymiarowej czasoprzestrzeni wszystkie reprezentacje algebry Clifforda są równoważne. Istnieje więc nieosobliwa macierz podobieństwa P łacząca te dwie reprezentacje, tzn. zachodzi

$$\gamma^0 = P^{-1}\gamma^0 P \qquad\qquad -\boldsymbol{\gamma} = P^{-1}\boldsymbol{\gamma}\,P\,. \tag{5.68}$$

Podstawiając te związki do równania (5.67), otrzymujemy równanie Diraca dla odbitego spinora (5.65)

$$\Big\{i\gamma^0\partial_t + i\boldsymbol{\gamma}\cdot\partial_{\mathbf{x}} - m\Big\}\,\psi^P(t,\mathbf{x}) = 0\,. \tag{5.69}$$

Z warunków (5.68) i reguł przestawiania dla macierzy gamma wynika, że

$$P = P^{-1} = \gamma^0 \tag{5.70}$$

może pełnić rolę operatora parzystości.

Zauważmy, że dla operatorów rzutowych na stany o określonej chiralności $P_\pm$ zachodzi

$$\gamma^0 P_\pm \,=\, P_\mp\gamma^0\,. \tag{5.71}$$

Wynika stąd, że odbicie przestrzenne *zmienia chiralność na przeciwną*

$$(\psi_\pm)^P(\mathbf{x}) = P\,P_\pm\psi(-\mathbf{x}) = P_\mp P\psi(-\mathbf{x}) = P_\mp\psi^P(\mathbf{x}) = (\psi^P)_\mp(\mathbf{x})\,.$$

Teorie ze złamaną symetrią P, na przykład teoria oddziaływań elektrosłabych, nie są niezmiennicze ze względu na zamianę spinorów chiralnych.

Transformacja odbicia przestrzennego wiąże również dwa równania Weyla, przekształcając jedno z nich w drugie. Wynika stąd, że teoria, w której istnieje pole bezmasowe o tylko jednej skrętności (na przykład, pole lewoskrętnych neutrin w modelu standardowym) nie jest niezmiennicza względem odbić przestrzennych.

5.7 Sprzężenie ładunkowe

Zdefiniujemy operację sprzężenia ładunkowego dla bispinora Diraca. W tym celu sprzęgnijmy pole Diraca z polem elektromagnetycznym A_μ przy pomocy zasady minimalnego sprzężenia omówioną szczegółowo w rozdziale 11:

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu\,, \tag{5.72}$$

gdzie $e>0$ jest elementarnym ładunkiem elektrycznym. Równanie Diraca (4.13) przyjmuje więc następującą postać

$$\{i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m\}\,\psi(x) = 0\,. \tag{5.73}$$

Pole sprzężone ładunkowo ψ^c, spełnia analogiczne równanie z przeciwną wartością ładunku

$$\{i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\}\,\psi^c(x) = 0\,. \tag{5.74}$$

Operacja sprzężenia ładunkowego przeprowadza bispinor ψ w jego sprzężenie ładunkowe ψ^c. Aby znaleźć jej jawną postać dokonajmy sprzężenia zespolonego równania (5.73)

$$\{-i(\gamma^\mu)^*(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\}\,\psi^*(x) = 0\,. \tag{5.75}$$

Zarówno macierze γ^μ jaki i $-(\gamma^\mu)^*$ spełnia algebrę (4.14). Istnieje więc w czterech wymiarach nieosobliwa macierz podobieństwa C taka, że zachodzi

$$-(\gamma^\mu)^* = C^{-1}\gamma^\mu C\,. \tag{5.76}$$

Podstawiając ten związek do równania (5.75), a następnie mnożąc je z lewej strony przez C, otrzymamy

$$\{i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\}\,C\psi^*(x) = 0\,. \tag{5.77}$$

Poprzez porównanie z (5.74) znajdujemy

$$\psi^c(x) = C\,\psi^*(x)\,. \tag{5.78}$$

Macierz sprzężenia ładunkowego C spełnia związek (5.76) lub relację równoważną

$$\gamma^\mu = -C\,(\gamma^\mu)^*\,C^{-1}\,. \tag{5.79}$$

Na macierze C można nałożyć dodatkowy warunek zgodny z relacją (5.76):

$$C^{-1} = C^* \qquad => \qquad C\,C^* = C^*C = 1\,, \tag{5.80}$$

co łatwo sprawdzić sprzęgając (5.76) i porównując z (5.79). Ponadto zachodzi

$$(\sigma^{\mu\nu})^* = -C^{-1}\sigma^{\mu\nu}C \tag{5.81}$$

$$(\gamma^5)^* = -C^{-1}\gamma^5\,C\,. \tag{5.82}$$

Bispinor ψ^c transformuje się tak samo jak bispinor ψ. Korzystając bowiem z wyniku (5.81), znajdziemy

$$\begin{aligned}(\psi^c)' &= (C\psi^*)' = C(\psi^*)' = C\,\mathrm{e}^{\frac{i}{4}\,\omega_{\mu\nu}\,(\sigma^{\mu\nu})^*}\,\psi^* \\ &= C\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{4}\,\omega_{\mu\nu}\,C^{-1}\sigma^{\mu\nu}C}\,\psi^* = C\,C^{-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{4}\,\omega_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu}}\,C\psi^* \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{i}{4}\,\omega_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu}}\,\psi^c.\end{aligned} \tag{5.83}$$

Ćwiczenie 31

Udowodnić relacje (5.81) i (5.82). Ponadto, korzystając z warunku (5.80) udowodnić

$$(\psi^c)^c = \psi\,. \tag{5.84}$$

Zapiszmy na koniec warunek sprzężenia ładunkowego dla bispinorów chiralnych. Wykorzystując własność (5.82) sprzężenia ładunkowego, otrzymujemy

$$(\psi_\pm)^c = C\,\frac{1 \pm (\gamma_5)^*}{2}\,\psi^* = C\,\frac{1 \mp C^{-1}\gamma_5\, C}{2}\,\psi^* = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}\,C\psi^* = (\psi^c)_\mp\,. \tag{5.85}$$

Tak więc, sprzężenie ładunkowe zmienia chiralność na przeciwną.

<u>Ćwiczenie 32</u>

W reprezentacji chiralnej i reprezentacji Diraca jedynie γ^2 ma elementy zespolone: $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$. Pokazać, że relacja (5.76) z $C^{-1} = C^*$ przyjmuje postać

$$C^*\gamma^2\,C = \gamma^2\,, \qquad C^*\gamma^k\,C = -\gamma^k\,, \qquad k = 0, 1, 3\,,$$

skąd wynika następująca postać macierzy sprzężenia ładunkowego

$$C = \mathrm{e}^{i\phi}\,\gamma^2 = \mathrm{e}^{i\phi}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.86}$$

gdzie ϕ jest dowolną fazą. Otrzymujemy w ten sposób macierz symetryczną: $C^T = C$.

Rozdział 6

Równanie Majorany

Bispinory ψ oraz ψ^c transformują się tak samo pod wplywem transformacji Lorentza, stąd w sytuacji gdy $\psi \neq \psi^c$ istnieje oprócz równania Diraca dwa inne równania niezmiennicze wględem właściwych ortochronicznych transformacji Lorentza, zwane **równaniami Majorany**

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - M\psi^c \;=\; 0 \tag{6.1}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi^c - M\psi \;=\; 0\,. \tag{6.2}$$

Równania te *nie są niezależne*, gdyż łączy je sprzężenie ładunkowe. Sprzęgając zespolono na przykład pierwsze z nich, dostaniemy:

$$-i(\gamma^\mu)^* \partial_\mu \psi^* - MC^*\psi = 0\,. \tag{6.3}$$

Mnożąc obie strony przez macierz sprzężenia ładunkowego C, a następnie wykorzystując relacje (5.79) i (5.80), dostaniemy drugie równanie. Dla ustalenia uwagi odtąd rozważać będziemy równanie (6.1).

Występujący w równaniach Majorany parametr M jest masą, zwaną *masą Majorany*, gdyż ψ (i podobnie ψ^c) spełnia równanie Kleina–Gordona z masą M. Działając bowiem operatorem $i\partial\!\!\!/ = i\gamma^\mu\partial_\mu$ po obu stronach równania (6.1) i korzystając z (6.2), otrzymujemy

$$(\Box + M^2)\,\psi = 0\,. \tag{6.4}$$

Masa Majorany jest na ogół różna od masy Diraca.

Równanie Majorany **nie jest** niezmiennicze wględem transformacji fazowych: $\psi \to \exp\{-i\lambda\}\psi$. Nie istnieje więc zachowany ładunek elektryczny, tak jak w teorii Diraca. Równania Majorany nadawałoby się więc do opisu neutralnych fermionów z masą – masowych neutrin. Podobnie, nie jest zachowana cząstkowa liczba leptonowej istniejąca w standardowym sformułowaniu teorii oddziaływań elektrosłabych, w którym neutrina pozostają bezmasowe. Tak więc, w przypadku istnienia neutrin masowych cząstkowa *liczba leptonowa nie jest zachowana.*

Zapiszmy równanie Majorany dla składowych chiralnych. Działając operatorami rzutowymi $P_\pm$ na równanie (6.1), a następnie wykorzystując związki

(5.85), otrzymujemy dwa równania

$$i\partial\!\!\!/\,\psi_+ - M(\psi_+)^c = 0 \tag{6.5}$$

$$i\partial\!\!\!/\,\psi_- - M(\psi_-)^c = 0 \tag{6.6}$$

W przeciwieństwie do równania Diraca składowe chiralne bispinora nie mieszają się. Tak więc *masowe neutrina mają określoną chiralność*, tak jak neutrina bezmasowe posiadają określoną skrętności.

6.1 Spinory Majorany

Spinory Majorany są zdefiniowane poprzez narzucenie dodatkowego warunku na bispinor Diraca

$$\psi = \psi^c. \tag{6.7}$$

Dzięki regule (5.83) warunek ten jest niezmienniczy względem właściwej transformacji Lorentza. Redukuje on liczbę stopni swobody bispinora Diraca o połowę. Można to wprost zobaczyć zapisując warunek Majorany dla bispinorów chiralnych. Podstawiając powyższy warunek do relacji (5.85), $(\psi_\pm)^c = (\psi^c)_\mp$, otrzymujemy

$$(\psi_+)^c = \psi_-\,, \qquad\qquad (\psi_-)^c = \psi_+\,. \tag{6.8}$$

Tak więc składowe chiralne bispinorów Majorany nie są niezależne, jeden z nich można otrzymać z drugiego poprzez sprzężenia zespolone. W zależności od tego, który ze spinorów chiralnych traktujemy jako niezależny, dostajemy dla bispinorów Majorany

$$\psi = \psi_+ + (\psi_+)^c \tag{6.9}$$

lub

$$\psi = \psi_- + (\psi_-)^c. \tag{6.10}$$

Warunek Majorany powoduje, że równania Majorany dla składowych chiralnych (6.5) stają się zależne poprzez operację sprzężenia ładunkowego. W takim przypadku pozostaje tylko jedno równanie dla składowej chiralnej, którą traktujemy jako niezależną,

$$i\partial\!\!\!/\,\psi_+ - M(\psi_+)^c = 0\,. \tag{6.11}$$

lub

$$i\partial\!\!\!/\,\psi_- - M(\psi_-)^c = 0\,. \tag{6.12}$$

6.2 Reprezentacja Majorany

Zauważmy, że operacja sprzężenia ładunkowego (5.78) bispinora byłaby szczególnie prosta gdyby istniała reprezentacja macierzy gamma Diraca, dla której $C = 1$. Wtedy

$$\psi^c = \psi^*\,. \tag{6.13}$$

Warunek (5.79) przyjmuje wtedy postać

$$(\gamma^\mu)^* = -\gamma^\mu \tag{6.14}$$

co oznacza, że macierze γ^μ powinny być czysto urojone. Taka reprezentacja, znaleziona przez Majoranę, to

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ponadto

$$\gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

Zachowane są własności hermitowskości γ^0 i γ_5 oraz antyhermitowskości $\gamma^{1,2,3}$.

W reprezentacji Majorany operator $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$ jest czysto rzeczywisty i równanie Diraca

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\,(\psi_{re} + i\psi_{im}) = 0$$

rozpada się na dwa identyczne, niezależne równania dla części rzeczywistej ψ_{re} i urojonej ψ_{im} bispinora Diraca

$$\begin{aligned} (i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi_{re} &= 0 \\ (i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi_{im} &= 0. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Równanie Majorany

$$i\partial\!\!\!/\,(\psi_{re} + i\psi_{im}) - M(\psi_{re} - i\psi_{im}) = 0 \tag{6.18}$$

prowadzi do dwóch różnych równań rzeczywistych

$$\begin{aligned} (i\partial\!\!\!/ - M)\,\psi_{re} &= 0 \\ (i\partial\!\!\!/ + M)\,\psi_{im} &= 0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Warunek Majorany $\psi^* = \psi$ eliminuje składowe urojone bispinora. Tak więc spinor Majorany ma tylko 4 składowe rzeczywiste

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

Równanie Majorany, podobnie jak równanie Diraca, przyjmuje teraz postać

$$(i\partial\!\!\!/ - M)\,\psi_{re} = 0. \tag{6.21}$$

Ćwiczenie 33

Pokazać, że w reprezentacji Majorany oprreratory rzutowe $P_\pm$ przyjmują postać

$$P_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \qquad P_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.22}$$

a spinory chiralne dla spinora Majorany (6.20) to

$$\psi_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 - i\psi_2 \\ \psi_2 + i\psi_1 \\ \psi_3 + i\psi_4 \\ \psi_4 - i\psi_3 \end{pmatrix} \qquad \psi_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 + i\psi_2 \\ \psi_2 - i\psi_1 \\ \psi_3 - i\psi_4 \\ \psi_4 + i\psi_3 \end{pmatrix} \tag{6.23}$$

Sprawdzić, że zachodzi

$$(\psi_\pm)^c = \psi_\mp\,,$$

a także

$$\psi = \psi_+ + (\psi_+)^c = \psi_- + (\psi_-)^c\,.$$

Rozdział 7

Cząstki o spinie 0

Jak pamiętamy, nie jest możliwe skonstruowanie mechaniki kwantowej z funkcją falową ϕ spełniającą równanie Kleina–Gordona (3.16). Potraktujmy ją jednak jako klasyczne pole – funkcję liczbową określoną w każdym punkcie czasoprzestrzeni x. Zażądajmy by było to pole *skalarne*, tzn. prawo transformacyjne dla przekształceń Lorentza miało postać

$$\phi'(x') = \phi(x) \qquad\qquad x' = Lx\,. \tag{7.1}$$

Równanie Kleina–Gordona jest teraz jawnie relatywistycznie niezmienniczym równaniem falowym. Zapisując je bowiem przy pomocy operatora (2.32) otrzymamy

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(x) = 0\,. \tag{7.2}$$

Określenie "klasyczne pole" może być nieco mylące, gdyż w równaniu pola występuje stala Plancka $\hbar$. Termin ten oznacza tylko, że punktem startowym do dalszych rozważań jest funkcja liczbowa ϕ, a nie operator $\hat{\phi}$. Ten ostatni otrzymamy w wyniku kwantowania pola ϕ. Po tej uwadze możemy wybrać układ jednostek, w którym $c = \hbar = 1$, by odtąd rozważać równanie

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = 0\,. \tag{7.3}$$

7.1 Rozwiązanie klasyczne

Rozważmy na początek pole rzeczywiste: $\phi = \phi^*$. Poszukajmy rozwiązania równania (7.3), wykonując transformatę Fouriera

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\,\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(t)\,. \tag{7.4}$$

Podstawiając do (7.3), otrzymamy równanie oscylatora harmonicznego dla współczynników fourierowskich

$$\frac{d^2\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}}{dt^2} + (\mathbf{k}^2 + m^2)\,\tilde{\phi}_{\mathbf{k}} = 0\,. \tag{7.5}$$

Ogólne rozwiązanie to

$$\tilde{\phi}_{\mathbf{k}}(t) = \mathrm{e}^{-iE_k t} A_{\mathbf{k}} + \mathrm{e}^{iE_k t} B_{\mathbf{k}} . \tag{7.6}$$

gdzie energia

$$E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0 , \tag{7.7}$$

a $A_{\mathbf{k}}$ i $B_{\mathbf{k}}$ są dowolnymi współczynnikami zespolonymi. Podstawiając to rozwiązanie do (7.4) otrzymujemy, po uprzedniej zmianie $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$ w drugim członie,

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left\{ \mathrm{e}^{-ikx} A_{\mathbf{k}} + \mathrm{e}^{ikx} B_{-\mathbf{k}} \right\} , \tag{7.8}$$

gdzie $kx = E_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$. Warunek rzeczywistości pola prowadzi do wniosku $B_{-\mathbf{k}} = A^*_{\mathbf{k}}$. Tak więc ostateczna postać klasycznego rozwiązania równania Kleina–Gordona to

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k (2\pi)^3} \left\{ \mathrm{e}^{-ikx} A_{\mathbf{k}} + \mathrm{e}^{ikx} A^*_{\mathbf{k}} \right\} . \tag{7.9}$$

Wprowadziliśmy tu dodatkowo czynnik $2E_k$, tak by miara całkowa była relatywistycznie niezmiennicza.

<u>Ćwiczenie 34</u>
Pokazać całkując po k^0, że miara całkowa w rozwiązaniu (7.9) jest niezmiennicza dla właściwego ortochronicznego przekształcenia Lorentza:

$$\frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k} = d^4k \, \delta(k^2 - m^2) \, \Theta(k^0) . \tag{7.10}$$

Skorzystać z własności delty Diraca

$$\delta((k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2) = \frac{1}{2E_k} \left\{ \delta(k^0 - E_k) + \delta(k^0 + E_k) \right\} . \tag{7.11}$$

7.2 Pole kwantowe

Skwantujemy rozwiązanie klasyczne (7.9) poprzez zastąpienie współczynników fourierowskich operatorami $(\hat{A}_{\mathbf{k}}, \hat{A}^\dagger_{\mathbf{k}})$. Otrzymamy w ten sposób *hermitowskie* $(\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger)$ pole kwantowe

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k (2\pi)^3} \left\{ \mathrm{e}^{-ikx} \, \hat{A}_{\mathbf{k}} + \mathrm{e}^{ikx} \, \hat{A}^\dagger_{\mathbf{k}} \right\} , \tag{7.12}$$

spełniające równanie Kleina–Gordona (7.3).

Zastąpienie liczb operatorami wnosi nowy aspekt, reguły przemienności otrzymanych w ten sposób operatorów. W ogólności reguły przemienności dla operatorów są zadane poprzez komutatory $(-)$ lub antykomutatory $(+)$. Dla dowolnych operatorów A i B:

$$[A, B]_{\pm} = AB \pm BA . \tag{7.13}$$

NInteresują nas reguły przemienności dla operatorów pola w dwóch różnych punktach czasoprzestrzeni

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]_\pm \equiv \hat{D}_\pm(x,y) . \tag{7.14}$$

Chcemy by $\hat{D}_\pm(x,y)$ było niezmiennicze względem najszerszej grupy transformacji symetrii przestrzeni Minkowskiego: przekształceń Poincarego (2.26). Prowadzi to do wniosku, że $\hat{D}_\pm$ musi być funkcją różnicy współrzędnych

$$\hat{D}_\pm(x,y) = \hat{D}_\pm(x-y) . \tag{7.15}$$

Żadanie niezmienniczości pozwoli określić reguły przemienności dla operatorów w rozwinięciu Fouriera.

Podstawiając pola (7.12) do (7.15), policzymy korzystając z prostych własności (anty)komutatorów

$$\begin{aligned}[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]_\pm \; = \; & \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{2E_q(2\pi)^3} \\ & \Big\{ \; [\hat{A}_\mathbf{k}, \hat{A}_\mathbf{q}]_\pm \, \mathrm{e}^{-i(kx+qy)} + [\hat{A}_\mathbf{k}, \hat{A}_\mathbf{q}^\dagger]_\pm \, \mathrm{e}^{-i(kx-qy)} \\ & + \; [\hat{A}_\mathbf{k}^\dagger, \hat{A}_\mathbf{q}]_\pm \, \mathrm{e}^{i(kx-qy)} + [\hat{A}_\mathbf{k}^\dagger, \hat{A}_\mathbf{q}^\dagger]_\pm \, \mathrm{e}^{i(kx+qy)} \Big\} . \end{aligned} \tag{7.16}$$

Załóżmy, że każdy z (anty)komutatorów po prawej stronie jest proporcjonalny do $\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})$. Pozwoli to wykonać całkowanie po $d^3\mathbf{q}$, utożsamiając czteropędy $k = q$. W wykładnikach eksponent pojawią się zatem wspólrzędne z plusem $(x+y)$ oraz z minusem $(x-y)$. Kombinacje z plusem są źródłem trudności, gdyż nie będzie mógł być spełniony warunek (7.15). Jedynym rozwiązeniem jest założenie, iż znikają (anty)komutatory przy "złych" eksponentach. Tak więc

$$[\hat{A}_\mathbf{k}, \hat{A}_\mathbf{q}]_\pm = [\hat{A}_\mathbf{k}^\dagger, \hat{A}_\mathbf{q}^\dagger]_\pm = 0 . \tag{7.17}$$

Dla pozostałych (anty)komutatorów założymy:

$$[\hat{A}_\mathbf{k}, \hat{A}_\mathbf{q}^\dagger]_\pm = f(\mathbf{k})\, \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) , \tag{7.18}$$

gdzie $f(\mathbf{k})$ jest na razie dowolną funkcją liczbową. Podstawiając powyższe reguły komutacji do równania (7.16) otrzymamy

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]_\pm \; = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3} \frac{f(\mathbf{k})}{2E_k(2\pi)^3} \Big\{ \mathrm{e}^{-ik(x-y)} \pm \mathrm{e}^{ik(x-y)} \Big\} . \tag{7.19}$$

Korzystając z wyniku (7.10) stwierdzamy, że wyrażenie po prawej stronie jest niezmiennikiem lorentzowskim gdy

$$f(\mathbf{k}) = 2E_k(2\pi)^3 . \tag{7.20}$$

Zatem otrzymamy

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]_\pm \; = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3} \Big\{ \mathrm{e}^{-ik(x-y)} \pm \mathrm{e}^{ik(x-y)} \Big\} . \tag{7.21}$$

Pozostaje do roztrzygnięcia jeszcze jeden zasadniczy problem: wybór reguł komutacji. Pomaga w tym zasada **mikroprzyczynowości**. Żądamy by operatory pola były nieskorelowane dla zdarzeń rozdzielonych przestrzennie, tzn.

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]_{\pm} = 0 \qquad \text{dla} \qquad (x-y)^2 < 0\,. \tag{7.22}$$

Udowidnimy, że dla pola skalarnego warunek ten może być spełniony tylko dla **komutatorów**.

Mianowicie, dla zdarzeń rozdzielonych wektorem przestrzennym zawsze istnieje układ odniesienia, w którym czterowektor $x-y=(0,\mathbf{x}-\mathbf{y})$. W tym układzie

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]_{\pm} \;=\; \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\left\{\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \pm \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right\}$$

Po rozdzieleniu na dwie całki i zamianie $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$ w jednej z nich, wyrażenie po prawej stronie znika tylko po wyborze znaku minus czyli komutatora, dla którego wprowadzimy oznaczenie: $[\cdot,\cdot]_- = [\cdot,\cdot]$. Ponieważ (anty)komutator dwóch pól był skonstruowany w sposób niezmienniczy, wynik ten nie zależy od wyboru układu współrzędnych. Ostatecznie, warunek przemienności dla pola skalarnego przyjmuje następującą niezmienniczą postać

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] \;&=\; \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\left\{\mathrm{e}^{-ik(x-y)} - \mathrm{e}^{ik(x-y)}\right\} \\ &\equiv\; i\Delta(x-y)\,. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Kwantowanie pola skalarnego przy pomocy komutatorów prowadzi do **bozonowej** algebry operatorów kreacji i anihilacji. Definiując bowiem nowe operatory $a_{\mathbf{k}}$ i $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ takie, że

$$\hat{A}_{\mathbf{k}} = \sqrt{2E_k(2\pi)^3}\,a_{\mathbf{k}} \qquad\qquad \hat{A}^\dagger_{\mathbf{k}} = \sqrt{2E_k(2\pi)^3}\,a^\dagger_{\mathbf{k}}\,, \tag{7.24}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}] \;&=\; [a^\dagger_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] \;=\; 0 \\ [a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] \;&=\; \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})\,, \end{aligned} \tag{7.25}$$

a pole kwantowe (7.12) przybiera ostatecznie postać:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}}\left\{a_{\mathbf{k}}\,\mathrm{e}^{-ikx} + a^\dagger_{\mathbf{k}}\,\mathrm{e}^{ikx}\right\}. \tag{7.26}$$

Kwantowanie pola skalarnego przy pomocy algebry bozonowej jest przypadkiem szczególnym twierdzenia o zwiazku spinu ze statystyką. Ponieważ pole $\hat{\phi}$ ma spin 0, pojawiające się w wyniku kwantowania cząstki są bezspinowymi bozonami.

Ćwiczenie 35
Udowodnić wzór

$$i\,\Delta(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\,\delta(k^2-m^2)\,\epsilon(k^0)\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\,, \tag{7.27}$$

gdzie $\epsilon(k^0) = k^0/|k^0|$ oraz następujące własności dystrybucji Δ:

$$(\Box + m^2)\,\Delta(x) = 0 \qquad \text{i} \qquad \partial_0\Delta(0,\mathbf{x}) = -\delta^3(\mathbf{x})\,. \tag{7.28}$$

Wyprowadzić stąd równoczasowe ($x_0 = y_0 = t$), kanoniczne reguły komutacji, które również mogą być użyte do kwantowania pola skalarnego:

$$\left[\hat{\phi}(t,\mathbf{x}),\hat{\phi}(t,\mathbf{y})\right] \;=\; 0 \tag{7.29}$$

$$\left[\hat{\phi}(t,\mathbf{x}),\partial_0\hat{\phi}(t,\mathbf{y})\right] \;=\; i\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{7.30}$$

7.3 Przestrzeń stanów wielocząstkowych

Kwantowanie skalarnego pola Kleina-Gordona prowadzi do układu nieodróżnialnych, swobodnych cząstek podlegających statystyce Bosego–Einsteina. Stany wielocząstkowe są konstruowane w następujący sposób. Próżnia, czyli stan 0-cząstkowy, jest zdefiniowana jako stan $|\,0\,\rangle$ taki, że

$$a_{\mathbf{k}}\,|\,0\,\rangle \;=\; 0 \qquad \text{dla każdego } \mathbf{k}\,. \tag{7.31}$$

Nienormowalne stany wielocząstkowe to

$$\begin{aligned} a^\dagger_{\mathbf{k}_1}\,|\,0\,\rangle &= |\,\mathbf{k}_1\,\rangle \\ a^\dagger_{\mathbf{k}_1}\,a^\dagger_{\mathbf{k}_2}\,|\,0\,\rangle &= |\,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\,\rangle \\ a^\dagger_{\mathbf{k}_1}\,a^\dagger_{\mathbf{k}_2}\ldots a^\dagger_{\mathbf{k}_n}\,|\,0\,\rangle &= |\,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\ldots\mathbf{k}_n\,\rangle\;. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Dzięki regułom (7.25) stany te są symetryczne ze względu na dowolne przestawienia pędów (cząstek), np. $|\,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2\,\rangle = |\,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1\,\rangle$, a więc opisywane cząstki są bozonami. Stany (7.32) tworzą zespoloną przestrzeń liniową. Można więc konstruować liniowe kombinacje stanów o różnej liczbie cząstek, otrzymując stan o nieokreślonej liczbie cząstek.

Zdefiniowane poniżej komutujące między sobą, hermitowskie operatory są odpowiednio, operatorami liczby cząstek, energii i pędu:

$$N \;=\; \int d^3\mathbf{p}\; a^\dagger_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}} \tag{7.33}$$

$$H \;=\; \int d^3\mathbf{p}\; E_p\, a^\dagger_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}} \tag{7.34}$$

$$\mathbf{P} \;=\; \int d^3\mathbf{p}\; \mathbf{p}\, a^\dagger_{\mathbf{p}}\,a_{\mathbf{p}}\,. \tag{7.35}$$

Działając bowiem na stany (7.32) dostajemy

$$\begin{aligned} N\,|\,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,...\mathbf{k}_n\,\rangle &= n\,|\,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,...\mathbf{k}_n\,\rangle \\ H\,|\,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,...\mathbf{k}_n\,\rangle &= (E_{k_1}+E_{k_2}+...+E_{k_n})\,|\,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,...\mathbf{k}_n\,\rangle \\ \mathbf{P}\,|\,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,...\mathbf{k}_n\,\rangle &= (\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+...+\mathbf{k}_n)\,|\,\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,...\mathbf{k}_n\,\rangle\ , \end{aligned} \tag{7.36}$$

natomiast dla stanu próżni zachodzi

$$N\,|\,0\rangle = H\,|\,0\rangle = \mathbf{P}\,|\,0\rangle = 0\,. \tag{7.37}$$

Jak widzimy, spektrum energetyczne w tak określonej teorii jest ograniczone od dołu przez zerową energię próżni. Wynika to z ustawienia operatorów anihilacji po prawej stronie ("porządek normalny") w zdefiniowanych operatorach. Nie mamy więc problemu ze stabilnością cząstek, z których każda ma dodatnią energię $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$.

Korzystając z reguł komutacji (7.25), otrzymujemy

$$\begin{array}{lll} [N,a^\dagger_{\mathbf{k}}] = a^\dagger_{\mathbf{k}} & [H,a^\dagger_{\mathbf{k}}] = E_k\,a^\dagger_{\mathbf{k}} & [\mathbf{P},a^\dagger_{\mathbf{k}}] = \mathbf{k}\,a^\dagger_{\mathbf{k}} \\ [N,a_{\mathbf{k}}] = -a_{\mathbf{k}} & [H,a_{\mathbf{k}}] = -E_k\,a_{\mathbf{k}} & [\mathbf{P},a_{\mathbf{k}}] = -\mathbf{k}\,a_{\mathbf{k}}. \end{array} \tag{7.38}$$

Powyższe relacje pozwalają się przekonać, że istotnie operatory $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ kreują cząstki o energii E_k pędzie $\mathbf{k}$, a operatory $a_{\mathbf{k}}$ ją niszczą. Rozważając bowiem dowolny stan własny $|\,n,E,\mathbf{p}\rangle$ operatorów (7.33), dostaniemy

$$\begin{aligned} H\,a^\dagger_{\mathbf{k}}\,|\,n,E,\mathbf{p}\rangle &= (a^\dagger_{\mathbf{k}}\,H + a^\dagger_{\mathbf{k}}\,E_k)\,|\,n,E,\mathbf{p}\rangle = (E+E_k)\,a^\dagger_{\mathbf{k}}\,|\,n,E,\mathbf{p}\rangle \\ H\,a_{\mathbf{k}}\,|\,n,E,\mathbf{p}\rangle &= (a_{\mathbf{k}}\,H - a_{\mathbf{k}}\,E_k)\,|\,n,E,\mathbf{p}\rangle = (E-E_k)\,a_{\mathbf{k}}\,|\,n,E,\mathbf{p}\rangle\ . \end{aligned}$$

i podobnie dla operatorów liczby cząstek i pędu.

Ćwiczenie 36
Wyprowadzić relacje (7.38) by następnie udowodnić (7.36) dla $n=2$.

7.4 Operacje symetrii

Operatory energii i pędu są **generatorami** unitarnych transformacji przesunięć w czasie i przestrzeni. Zachodzi bowiem dla pola swobodnego (7.26)

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{iHt'}\,\hat{\phi}(t,\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-iHt'} &= \hat{\phi}(t+t',\mathbf{x}) \\ \mathrm{e}^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}'}\,\hat{\phi}(t,\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}'} &= \hat{\phi}(t,\mathbf{x}+\mathbf{x}')\,. \end{aligned} \tag{7.39}$$

Takie prawa transformacyjne zapewniają niezmienniczość równanie Kleina-Gordona dla pola oraz reguł komutacji (7.23) względem translacji czasoprzestrzennych. W konsekwencji algebra operatorów kreacji i anihilacji jest niezależna od przesunięć. Podobnie, zachowany jest relatywistyczny związek między energią a pędem wynikający z równania ruchu.

Ćwiczenie 37

Rozwijając funkcję operatorową $F(\lambda) = \exp(\lambda A)\, B \exp(-\lambda A)$ w szereg Taylora wokół $\lambda = 0$, a następnie kładąc $\lambda = 1$ udowodnić relację

$$\mathrm{e}^{A} B\, \mathrm{e}^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \ldots, \tag{7.40}$$

gdzie A, B są dowolnymi operatorami, dla których występujące tu wyrażenia mają sens.

Przy pomocy wzoru (7.40) i regul komutacji (7.38) łatwo udowodnić relacje

$$\begin{aligned} \exp\{iHt'\}\, a_{\mathbf{k}} \exp\{-iHt'\} &= \mathrm{e}^{-iE_k t'}\, a_{\mathbf{k}}\,, \\ \exp\{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}'\}\, a_{\mathbf{k}} \exp\{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}'\} &= \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\, a_{\mathbf{k}}\,, \end{aligned} \tag{7.41}$$

Dokonując sprzężenia hermitowskiego obu stron znajdziemy analogiczne relacje dla operatorów kreacji $a^\dagger_{\mathbf{k}}$,

$$\begin{aligned} \exp\{iHt'\}\, a^\dagger_{\mathbf{k}} \exp\{-iHt'\} &= \mathrm{e}^{iE_k t'}\, a^\dagger_{\mathbf{k}}\,, \\ \exp\{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}'\}\, a^\dagger_{\mathbf{k}} \exp\{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}'\} &= \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}\, a^\dagger_{\mathbf{k}}\,. \end{aligned} \tag{7.42}$$

Przy pomocy powyższych związków łatwo już udowodnimy prawa transformacyjne (7.39).

Rozważając infinitezymalne przesunięcia i rozwijając równania (7.39) z dokładnością do wyrażeń pierwszego rzędu, dostajemy równania

$$i[H, \hat{\phi}] = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \qquad\qquad -i[\mathbf{P}, \hat{\phi}] = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \mathbf{x}}\,. \tag{7.43}$$

Wyrażają one w różniczkowej formie własności transformacyjne pola $\hat{\phi}$ względem przesunięć w czasoprzestrzeni.

Równania (7.43) można zapisać w formie kowariantnej traktując operatory H i $\mathbf{P}$ jako składowe operatora czteropędu $P_\mu = (H, -\mathbf{P})$:

$$i[P_\mu, \hat{\phi}] = \partial_\mu \hat{\phi}\,. \tag{7.44}$$

Ćwiczenie 38

Pokazać, że równanie Kleina-Gordona wynika z równań (7.43) dla pola swobodnego (7.26).

7.5 Zespolone pole skalarne

Rozważmy dwa niezależne rzeczywiste pola skalarne ϕ_1 i ϕ_2 spełniające równania Kleina–Gordona z tym samym parametrem masowym i utwórzmy z nich dwie zespolone kombinacje:

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \qquad \phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}. \tag{7.45}$$

Traktujemy te kombinacje jako dwa niezależne pola ($\phi \neq \phi^*$).

Kwantując pola ϕ_1 i ϕ_2 zgodnie ze wzorem (7.26) otrzymamy dwa układy niezależnych od siebie operatorów kreacji i anihilacji $(a_{1\mathbf{k}}, a^\dagger_{1\mathbf{k}})$ i $(a_{2\mathbf{k}}, a^\dagger_{2\mathbf{k}})$ dla każdego modu pędowego $\mathbf{k}$. Tak więc dla skwantowanych pól (7.45) otrzymamy

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}} \left\{ a_\mathbf{k}\,\mathrm{e}^{-ikx} + b^\dagger_\mathbf{k}\,\mathrm{e}^{ikx} \right\} \\ \hat{\phi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}} \left\{ b_\mathbf{k}\,\mathrm{e}^{-ikx} + a^\dagger_\mathbf{k}\,\mathrm{e}^{ikx} \right\}, \end{aligned} \tag{7.46}$$

gdzie operatory a i b mają następującą postać dla każdego pędu $\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} a_\mathbf{k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1\mathbf{k}} + i\,a_{2\mathbf{k}}) \qquad & b^\dagger_\mathbf{k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger_{1\mathbf{k}} + i\,a^\dagger_{2\mathbf{k}}\right) \\ b_\mathbf{k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1\mathbf{k}} - i\,a_{2\mathbf{k}}) \qquad & a^\dagger_\mathbf{k} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger_{1\mathbf{k}} - i\,a^\dagger_{2\mathbf{k}}\right). \end{aligned} \tag{7.47}$$

Łatwo sprawdzić, że powyższa transformacja nie zmienia reguł komutacji, tak więc $(a_\mathbf{k}, a^\dagger_\mathbf{k})$ oraz $(b_\mathbf{k}, b^\dagger_\mathbf{k})$ tworzą w dalszym ciągu dwa niezależne układy operatorów kreacji i anihilacji

$$\begin{aligned} [a_\mathbf{k}, a_\mathbf{q}] &= 0 \qquad & [b_\mathbf{k}, b_\mathbf{q}] &= 0 \\ [a^\dagger_\mathbf{k}, a^\dagger_\mathbf{q}] &= 0 \qquad & [b^\dagger_\mathbf{k}, b^\dagger_\mathbf{q}] &= 0 \\ [a_\mathbf{k}, a^\dagger_\mathbf{q}] &= \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \qquad & [b_\mathbf{k}, b^\dagger_\mathbf{q}] &= \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \end{aligned} \tag{7.48}$$

i dodatkowo operatory typu a komutują z operatorami typu b.

Pola (7.46) opisują więc dwa rodzaje cząstek. Tak jak poprzednio stan próżni jest określony przez warunek

$$a_\mathbf{k}|0\rangle = b_\mathbf{k}|0\rangle = 0 \qquad \text{dla każdego } \mathbf{k}. \tag{7.49}$$

Stan wielocząstkowy to

$$|\mathbf{k}_1 r_1, \mathbf{k}_2 r_2 \ldots \mathbf{k}_n r_n\rangle = r^\dagger_{\mathbf{k}_1} r^\dagger_{\mathbf{k}_2} \ldots r^\dagger_{\mathbf{k}_n}|0\rangle, \tag{7.50}$$

gdzie $r = a$ lub b rozróżnia rodzaj cząstki. Ze względu na *bozonowe* reguły komutacji (7.48), dowolne przestawienie cząstek nie prowadzi do zmiany stanu. W tym samym stanie kwantowym może być dowolna liczba cząstek.

Hermitowskie, komutujące między sobą, operatory całkowitej liczby cząstek, energii i pędu są określone, odpowiednio

$$\begin{aligned} N &= N_a + N_b = \int d^3\mathbf{p}\, (a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^\dagger_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}) \\ H &= H_a + H_b = \int d^3\mathbf{p}\, E_p (a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^\dagger_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b = \int d^3\mathbf{p}\, \mathbf{p} (a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^\dagger_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}) \,. \end{aligned} \tag{7.51}$$

Otrzymana w ten sposób teoria prowadzi do stabilnego spektrum energetycznego, a najniższy stan (próżnia) ma energię równą zeru:

$$H\,|\,0\,\rangle = \mathbf{P}\,|\,0\,\rangle = N\,|\,0\,\rangle = 0 \,. \tag{7.52}$$

Tak jak dla pola rzeczywistego, operatory energii i pędu są generatorami unitarnych transformacji przesunięć w czasoprzestrzeni dla obu pól.

7.6 Operator ładunku i transformacja cechowania

Dla pola zespolonego istnieje niezależny od operatorów (7.51) operator **całkowitego ładunku**:

$$Q = e \int d^3\mathbf{p}\, (a^\dagger_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} - b^\dagger_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}) = eN_a - eN_b \,, \tag{7.53}$$

gdzie przyjęliśmy, że kwanty a niosą ładunek e, a kwanty b ładunek $-e$. Łatwo bowiem udowodnić, że

$$\begin{aligned} [\,Q\,, a^\dagger_{\mathbf{k}}\,] &= e\, a^\dagger_{\mathbf{k}} \qquad\qquad [\,Q\,, b^\dagger_{\mathbf{k}}\,] = (-e)\, b^\dagger_{\mathbf{k}} \\ [\,Q\,, a_{\mathbf{k}}\,] &= -e\, a_{\mathbf{k}} \qquad\qquad [\,Q\,, b_{\mathbf{k}}\,] = -(-e)\, b_{\mathbf{k}} \,. \end{aligned} \tag{7.54}$$

Stąd $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ kreuje a $a_{\mathbf{k}}$ anihiluje cząstkę o ładunku e, natomiast $b^\dagger_{\mathbf{k}}$ kreuje a $b_{\mathbf{k}}$ anihiluje cząstkę o ładunku $-e$. Tak więc a jest antycząstką b (lub na odwrót). Ponadto, dla stanu próżni zachodzi

$$Q\,|\,0\,\rangle = 0 \,. \tag{7.55}$$

Operator Q komutuje ze wszystkim operatorami (7.51). W szczególności wynika stąd, że operator ładunku jest zachowany w czasie, gdyż

$$Q(t) = \mathrm{e}^{iHt}\, Q\, \mathrm{e}^{-iHt} = Q \,. \tag{7.56}$$

Operator ładunku jest generatorem nowego typu transformacji symetrii. Jeśli λ jest rzeczywistym parametrem tej transformacji to

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\lambda Q}\, \hat{\phi}(x)\, \mathrm{e}^{-i\lambda Q} &= \mathrm{e}^{-i\lambda e}\, \hat{\phi}(x) \\ \mathrm{e}^{i\lambda Q}\, \hat{\phi}^\dagger(x)\, \mathrm{e}^{-i\lambda Q} &= \mathrm{e}^{i\lambda e}\, \hat{\phi}^\dagger(x) \,. \end{aligned} \tag{7.57}$$

Jest to **globalna transformacja cechowania**, która przemnaża pole kwantowe przez niezależny od x czynnik fazowy, nie zmieniając jednocześnie współrzędnych czasoprzestrzennych pola.

Ćwiczenie 39

Korzystając ze wzoru (7.40) i relacji (7.54) udowodnić prawo transformacyjne (7.57).

Dla inifinitezymalnie małej wartości parametru λ relacje (7.57) przyjmują następującą postać

$$[Q, \hat{\phi}(x)] = -e\,\hat{\phi}(x)$$

$$[Q, \hat{\phi}^\dagger(x)] = \; e\,\hat{\phi}^\dagger(x)\,. \tag{7.58}$$

Tak więc operator $\hat{\phi}(x)$ kreuje w punkcie x stan o ładunku $-e$, a operator $\hat{\phi}^\dagger(x)$ kreuje stan o ładunku e, gdyż

$$Q\,\hat{\phi}(x)|0\rangle \; = [Q, \hat{\phi}(x)]\,|0\rangle \; = -e\,\hat{\phi}(x)|0\rangle$$

$$Q\,\hat{\phi}^\dagger(x)|0\rangle \; = [Q, \hat{\phi}^\dagger(x)]\,|0\rangle \; = \; e\,\hat{\phi}^\dagger(x)|0\rangle\;. \tag{7.59}$$

Łatwo sprawdzić, że wykreowane stany nie mają określonej energii i pędu gdyż nie są stanami własnymi operatorów energii i pędu, ze względu na relacje (7.43). Jest to zgodne z zasadą nieoznaczoności, gdyż wykreowany stan opisuje cząstkę (a) lub jej antycząstkę (b) w określonym punkcie x

$$\hat{\phi}(x)\,|0\rangle \;\; = \;\; \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}}\, \mathrm{e}^{ikx}\, b^\dagger_{\mathbf{k}}\,|0\rangle \equiv |\mathbf{x}, t, b\rangle$$

$$\hat{\phi}^\dagger(x)\,|0\rangle \;\; = \;\; \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}}\, \mathrm{e}^{-ikx}\, a^\dagger_{\mathbf{k}}\,|0\rangle \equiv |\mathbf{x}, t, a\rangle\,. \tag{7.60}$$

Transformacje cechowania, podobnie jak translacje czasoprzestrzenne, zachowują równanie pola oraz podstawowe reguły komutacji dla pól zespolonych:

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = [\hat{\phi}^\dagger(x), \hat{\phi}^\dagger(y)] = 0$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)] = i\,\Delta(x-y)\,. \tag{7.61}$$

Tym samym bozonowa algebra opratorów kreacji i anihilacji jest niezmiennicza względem transformacji cechowania. Globalne transformacje cechowania są więc symetrią dla skonstruowanej teorii swobodnego pola zespolonego.

Ćwiczenie 40

Udowodnić relacje (7.61), wychodząc z relacji (7.23) dla dwóch niezależnych pól rzeczywistych $\hat{\phi}_1$ i $\hat{\phi}_2$, z których zbudowaliśmy pola zespolone.

7.7 Propagator Feynmana–Stuckelberga

Propagator Feynmana $D_F(x,y)$ określa amplitudę prawdopodobieństwa propagacji cząstki kwantowej a z punktu $(\mathbf{y},t)$ do punktu $(\mathbf{x},t')$ pod warunkiem, że $t'>t$. Natomiast gdy $t>t'$ rozważamy propagację antycząstki b z punktu o chwili wcześniejszej $(\mathbf{x},t')$ do punktu $(\mathbf{y},t)$. Oznacza to, że interpretujemy antycząstkę jako cząstkę propagującą się wstecz w czasie. Zapisując

$$D_F(x,y) = \langle \mathbf{x},t'\,a|\,\mathbf{y},t,a\rangle\,\Theta(t'-t) + \langle \mathbf{y},t,b\,|\,\mathbf{x},t',b\rangle\,\Theta(t-t')\,, \tag{7.62}$$

gdzie Θ jest funkcja Heaviside równą 1 dla wartości argumentu wiekszych od zera i równą zeru dla argumentów mniejszych od zera. Wykorzystując relacje (7.60) oraz wprowadzając oznaczenia $x^0=t'$ i $y^0=t$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} D_F(x,y) &= \langle 0|\,\hat\phi(x)\,\hat\phi^\dagger(y)\,|0\rangle\,\Theta(x^0-y^0) + \langle 0|\,\hat\phi^\dagger(y)\,\hat\phi(x)\,|0\rangle\,\Theta(y^0-x^0) \\ &\equiv \langle 0|\,\mathrm{T}\,\hat\phi(x)\,\hat\phi^\dagger(y)\,|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{7.63}$$

Symbol T jest oznaczeniem dla operatora iloczynu chronologicznego, porządkującego operatory względem rosnących wartości argumentów czasowych licząc od prawa, tzn.

$$\mathrm{T}\,\hat\phi(x)\,\hat\phi^\dagger(y) = \begin{cases} \hat\phi(x)\,\hat\phi^\dagger(y) & \text{dla} \quad x^0>y^0 \\ \hat\phi^\dagger(y)\,\hat\phi(x) & \text{dla} \quad y^0>x^0\,. \end{cases} \tag{7.64}$$

Podstawiając rozwinięcie (7.26) dla operatorów pola, otrzymamy

$$\langle 0|\,\hat\phi(x)\,\hat\phi^\dagger(y)\,|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)} \tag{7.65}$$

Dla drugiego wyrażenia w (7.63) otrzymujemy wynik (7.65) z zamienionymi argumentami czasoprzestrzennymi. Tak więc $D_F(x,y)=D_F(x-y)$, gdzie

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\left\{\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\,\Theta(x^0-y^0) + \mathrm{e}^{ik(x-y)}\,\Theta(y^0-x^0)\right\} \tag{7.66}$$

oraz $k=(E_k,\mathbf{k})$.

Pokażemy, że propagator Feynmana można zapisać w postaci czterowymiarowej transformaty Fouriera

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\,\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\,. \tag{7.67}$$

Czteropęd $k=(k^0,\mathbf{k})$ nie spełnia w tym przypadku relacji dla cząstek rzeczywistych, $k^2=m^2$, w szczególności k^0 przyjmuje dowolne wartości rzeczywiste. Tym samym w przestrzeni pędowej propagator Feynmana jest superpozycją amplitud propagacji cząstek wirtualnych o dowolnej wirtualności k^2. Po odwróceniu relacji (7.67) otrzymamy propagator Feynmana w reprezentacji pędowej

$$\tilde D_F(k) = \int d^4x\,\mathrm{e}^{ikx}\,D_F(x) = \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\,. \tag{7.68}$$

Dowód wzoru (7.68) będzie polegał na wykonaniu całkowania po k^0 w (7.67) i pokazaniu, że w wyniku otrzymujemy wyrażenie (7.66). Tak więc

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi}\, \frac{i\,\mathrm{e}^{-ik^0(x^0-y^0)}}{(k^0-E_k+i\epsilon)(k^0+E_k-i\epsilon)}\,, \tag{7.69}$$

gdzie wykorzystaliśmy relację prawdziwą dla wielkości nieskończenie małej ϵ,

$$(k^0-E_k+i\epsilon)(k^0+E_k-i\epsilon) = (k^0)^2-(E_k)^2+2i\epsilon E_k+\epsilon^2 = k^2-m^2+i\epsilon\,.$$

W płaszczyźnie zespolonego k^0 funkcja podcałkowa w (7.69) ma dwa proste bieguny w punktach

$$k^0 = E_k - i\epsilon \qquad\qquad k^0 = -E_k + i\epsilon \tag{7.70}$$

Pierwszy z biegunów leży tuż poniżej osi rzeczywistej, natomiast drugi biegun jest położony tuż powyżej. Przepis z $i\epsilon$ we wzorze (7.68) służy więc określeniu sposobu obejścia (przesunięcia) biegunów $k^0=\pm E_k$ podczas całkowania wzdłuż osi rzeczywistej k^0. Pozostaje jeszcze do określenia sposób zamknięcia konturu całkowania w nieskończoności wzdłuż pólokręgu $k^0 = |k^0|(\cos\phi + i\sin\phi)$. Podstawiając tę postać do eksponenty $\exp\{-ik^0(x^0-y^0)\}$ stwierdzamy, że kluczowy dla znikania wkładu od półokręgu w granicy $|k^0|\to\infty$ jest czynnik $\exp\{\,|k^0|(x^0-y^0)\sin\phi\}$. Wkład od pólokręgu będzie równy zeru, gdy

$$(x^0-y^0)\sin\phi < 0\,.$$

Tak więc, dla $x^0 > y^0$ zamykamy kontur w dolnej półpłaszczyźnie wybierając biegun $k^0 = E_k$. Dla $y^0 > x^0$ kontur jest zamknięty w górnej półpłaszczyźnie z biegunem $k^0 = -E_k$. Obliczając w ten sposób całkę po k^0 metodą residuuów otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi}\,\{\cdots\} = \frac{\mathrm{e}^{-iE_k(x^0-y^0)}}{2E_k}\,\Theta(x^0-y^0) + \frac{\mathrm{e}^{iE_k(x^0-y^0)}}{2E_k}\,\Theta(y^0-x^0)\,.$$

Podstawiając ten wynik do (7.69) otrzymamy postać (7.66) propagatora pod warunkiem, że dokonamy jeszcze zamiany zmiennych $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$ dla $y^0 > x^0$.

Zakończmy stwierdzając, że propagator Feynmana jest funkcją Green równania Kleina–Gordona. Działając bowiem operatorem $\Box + m^2$ po obu stronach równania (7.67), otrzymamy

$$(\Box + m^2)\, D_F(x) = -i\,\delta^4(x)\,. \tag{7.71}$$

7.8 Pola versus cząstki

Podsumujmy przedstawioną w tym rozdziale konstrukcję. Rozważane hermitowskie skalarne pole kwantowe $\hat{\phi}(x)$ spełnia szereg warunków.

1. Pole $\hat{\phi}$ spełnia równanie Kleina-Gordona:
$$(\Box + m^2)\hat{\phi}(x) = 0\,.$$

2. Komutator pól w różnych punktach czasoprzestrzeni jest niezmienniczą funkcją (7.23), znikającą dla przestrzennopodobnych zdarzeń
$$[\,\hat{\phi}(x)\,,\hat{\phi}(y)\,] = i\Delta(x-y)\,.$$

3. Istnieje unitarna transformacja odpowiadająca translacjom w czasoprzestrzeni, zadana przez hermitowskie generatory $P^\mu = (H, \mathbf{P})$:
$$U(a) = \exp\{ia_\mu P^\mu\}\,,$$
pod wpływem której
$$U(a)\,\hat{\phi}(x)\,U^\dagger(a) = \hat{\phi}(x+a)\,.$$
Równanie Kleina–Gordona oraz reguła komutacji z punktu 2 są niezmiennicze względem tej transformacji. Translacje są więc symetrią dla kwantowego pola skalarnego.

4. Dla pól zespolonych istnieje unitarna transformacja cechowania z generatorem Q, komutującym z generatorami przesunięć P^μ,
$$U(\lambda) = \exp\{i\lambda Q\}\,,$$
dla której zachodzi
$$U(\lambda)\,\hat{\phi}(x)\,U^\dagger(\lambda) = \exp\{-i\lambda e\}\,\hat{\phi}(x)\,.$$
Transformacja cechowania, zachowując reguły komutacji (7.61) oraz równanie pola, są symetrią dla pola skalarnego.

Cząstki pojawiają się w przestrzeni dualnej do czasoprzestrzeni, przestrzeni czteropędów. Te dwie przestrzenie łaczy transformata Fouriera. Własności $1.-4.$ pól kwantowych mają swój odpowiednik we własnościach otrzymanych cząstek. I tak:

Ad 1. Energia i pęd cząstek spełniają relację relatywistyczną: $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$.

Ad 2. Cząstki są bozonami.

Ad 3. Generatory symetrii przesunięć w czasie ($P^0 = H$) i przestrzeni (P^k) są odpowiednio, zachowanymi w czasie operatorami całkowitej energii i całkowitego pędu cząstek.

Ad 4. Generator symetrii cechowania Q jest zachowanym w czasie operatorem całkowitego ładunku.

Rozdział 8

Cząstki o spinie 1/2

W rozdziale tym skonstruujemy pola kwantowe opisujące swobodne cząstki o spinie 1/2 – cząstki Diraca. Jak zobaczymy, muszą one być fermionami. Rozważmy w tym celu równanie Diraca (4.1),

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x) = 0\,, \tag{8.1}$$

gdzie dla uproszczenia notacji przyjęliśmy układ jednostek, w którym $\hbar = c = 1$. Zrezygnujmy z jednocząstkowej interpretacji opisanej w rozdziale 4 i potraktujmy bispinor ψ jako *klasyczne* pole spełniające równanie Diraca (8.1). Tak zdefiniowane pole poddamy procedurze kwantowania.

8.1 Rozwiązanie klasyczne

Jak pamiętamy, każda z czterech zespolonych składowych bispinora ψ spełnia równanie Kleina-Gordona, a więc słuszny jest rozkład (7.46) zapisany dla zespolonego pola klasycznego

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}} \left\{ a(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{-ikx} + b^*(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{ikx} \right\}, \tag{8.2}$$

gdzie *współczynniki liczbowe* $a(\mathbf{k})$ i $b(\mathbf{k})$ są czteroskładnikowymi wielkościami niosącymi wskaźnik spinorowy tak jak pole ψ. Podstawiając ten rozkład do równania (4.13), znajdziemy

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}} \left\{ (\gamma^\mu k_\mu - m)\,a(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{-ikx} - (\gamma^\mu k_\mu + m)\,b^*(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{ikx} \right\} = 0\,.$$

Tak więc na współczynniki Fouriera są nałożone dodatkowe warunki wynikające z równania Diraca:

$$(\not{k} - m)\,a(\mathbf{k}) = 0 \qquad\qquad (\not{k} + m)\,b^*(\mathbf{k}) = 0\,. \tag{8.3}$$

gdzie $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$ oraz $k_\mu = (E_k, -\mathbf{k})$.

Każde z powyższych równań ma dwa liniowo niezależne rozwiązania, odpowiednio $u(k,\alpha)$ dla $a(\mathbf{k})$ i $v(k,\alpha)$ dla $b^*(\mathbf{k})$ $(\alpha = 1, 2)$. Można je skonstruować rozwiązując równania (8.3) z macierzami γ w reprezentacji Diraca (4.17). Dostaniemy wtedy

$$u(k,\alpha) = \begin{pmatrix} \phi^{(\alpha)} \\ \\ \frac{\sigma\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\,\phi^{(\alpha)} \end{pmatrix} = \frac{\not{k}+m}{E_k+m}\begin{pmatrix} \phi^{(\alpha)} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

$$v(k,\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma\cdot\mathbf{k}}{E_k+m}\,\chi^{(\alpha)} \\ \\ \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix} = \frac{-\not{k}+m}{E_k+m}\begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

gdzie dla zależnych od k, dwuskładnikowych spinorów $\phi^{(\alpha)}, \chi^{(\alpha)}$ słuszne są relacje ortogonalności

$$[\phi^{(\alpha)}]^\dagger \phi^{(\beta)} \sim \delta_{\alpha\beta}\,, \qquad [\chi^{(\alpha)}]^\dagger \chi^{(\beta)} \sim \delta_{\alpha\beta} \tag{8.6}$$

oraz relacje zupełności

$$\sum_{\alpha=1,2} \phi^{(\alpha)}\,[\phi^{(\alpha)}]^\dagger \sim 1\,, \qquad \sum_{\alpha=1,2} \chi^{(\alpha)}\,[\chi^{(\alpha)}]^\dagger \sim 1\,. \tag{8.7}$$

Przykładem takich spinorów są

$$\phi^{(1)} = \chi^{(1)} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi^{(2)} = \chi^{(2)} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Ćwiczenie 41</u>

Wyprowadzić związki (8.4) oraz pokazać, że zachodzi

$$(\not{k}-m)(\not{k}+m) = k^2 - m^2 = 0\,. \tag{8.8}$$

Korzystając z wyniku powyższego ćwiczenia łatwo pokazać, że zachodzi

$$(\not{k}-m)\,u(k,\alpha) = 0 \qquad (\not{k}+m)\,v(k,\alpha) = 0\,. \tag{8.9}$$

Wprowadzając bispinory barowane $\overline{u} = u^\dagger\gamma^0$ oraz $\overline{v} = v^\dagger\gamma^0$, otrzymujemy

$$\overline{u}(k,\alpha)(\not{k}-m) = 0 \qquad \overline{v}(k,\alpha)(\not{k}+m) = 0\,. \tag{8.10}$$

Ponadto, przy odpowiednim wyborze normalizacji dla spinorów ϕ^α i χ^α, bispinory u i v spełniają następujące związki ortogonalności

$$\begin{aligned} \overline{u}(k,\alpha)\,u(k,\beta) &= 2m\,\delta_{\alpha\beta} \qquad & \overline{u}(k,\alpha)\,v(k,\beta) = 0 \\ \overline{v}(k,\alpha)\,v(k,\beta) &= -2m\,\delta_{\alpha\beta} \qquad & \overline{v}(k,\alpha)\,u(k,\beta) = 0\,. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Przy tak przyjętej normalizacji, otrzymujemy następujące relacje zupełności

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1,2} u_A(k,\alpha)\overline{u}_B(k,\alpha) &= (\not{k}+m)_{AB} \\ \sum_{\alpha=1,2} v_A(k,\alpha)\overline{v}_B(k,\alpha) &= (\not{k}-m)_{AB}\,. \end{aligned} \tag{8.12}$$

gdzie $A,B=1,2,3,4$ to wskaźniki bispinorowe. Pamiętajmy, że $k=(E_k,\mathbf{k})$ w powyższych relacjach.

Wracając do rozwiązań równań (8.3), znaleźliśmy

$$a(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha=1,2} a_{\mathbf{k}\alpha}\, u(k,\alpha) \qquad\qquad b^*(\mathbf{k}) = \sum_{\alpha=1,2} b^*_{\mathbf{k}\alpha}\, v(k,\alpha)\,, \tag{8.13}$$

gdzie $a_{\mathbf{k}\alpha}$ i $b^*_{\mathbf{k}\alpha}$ są dowolnymi współczynnikami liczbowymi, które nie niosą wskaźników spinorowych, gdyż te pozostają przy bispinorach u i v. Ostatecznie, rozwiązania klasyczne równania Diraca mają następującą postać ($\overline{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$)

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ a_{\mathbf{k}\alpha}\, u(k,\alpha)\,\mathrm{e}^{-ikx} + b^*_{\mathbf{k}\alpha}\, v(k,\alpha)\,\mathrm{e}^{ikx} \right\} \\ \overline{\psi}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2E_k(2\pi)^3}} \sum_{\alpha=1,2} \left\{ b_{\mathbf{k}\alpha}\, \overline{v}(k,\alpha)\,\mathrm{e}^{-ikx} + a^*_{\mathbf{k}\alpha}\, \overline{u}(k,\alpha)\,\mathrm{e}^{ikx} \right\}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

gdzie jak zwykle $kx = E_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$.

Ćwiczenie 42

Udowodnić relacje (8.9) – (8.12) pokazując jednocześnie, że w takim przypadku współczynnik proporcjonalności we wzorach (8.6) i (8.7) wynosi E_k+m.

8.2 Fermionowe pola kwantowe

Powtórzymy konstrukcję przedstawioną dla pól skalarnych zastępując współczynniki w rozwinięciach (8.14) odpowiednio operatorami $(\hat{a},\hat{a}^\dagger)$ i $(\hat{b},\hat{b}^\dagger)$. Zachowamy w ten sposób relację $\hat{\overline{\psi}} = \hat{\psi}^\dagger\gamma^0$ dla pól kwantowych. Algebra wprowadzonych operatorów zostanie wyznaczona na podstawie relacji przemienności dla pól spinorowych. Żądamy by słuszne były związki analogiczne do relacji (7.61) dla zespolonego pola skalarnego. Wprowadzając wskaźniki spinorowe

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_A(x), \hat{\psi}_B(y)]_\pm &= [\hat{\overline{\psi}}_A(x), \hat{\overline{\psi}}_B(y)]_\pm = 0 \\ [\hat{\psi}_A(x), \hat{\overline{\psi}}_B(y)]_\pm &= i\, D^\pm_{AB}(x-y)\,. \end{aligned} \tag{8.15}$$

gdzie podobnie jak poprzednio nie przesądzamy na początku czy pola Diraca są kwantowane przy pomocy komutatorów $(-)$ czy antykomutatorów $(+)$. Tak jak dla pola skalarnego, algebra (8.15) jest niezmiennicza względem transformacji cechowania. Cząstki kwantowe będą więc niosły ładunek. Operator $D^{\pm}_{AB}(x-y)$ zostanie wyznaczony z żądania niezmienniczości względem transformacji Poincarego oraz zasady mikroprzyczynowości.

Jak łatwo się przekonać po podstawieniu rozkładów (8.14), pierwsze dwie z relacji (8.15) mogą być tożsamościowo spełnione tylko wtedy, gdy następujące operatory (anty)komutują ze sobą dla każdej pary modów ($\mathbf{k}\alpha$) i ($\mathbf{q}\beta$) (odtąd opuszczamy symbol ˆ nad operatorami)

$$[a,a]_{\pm} = [a^{\dagger},a^{\dagger}]_{\pm} = [b,b]_{\pm} = [b^{\dagger},b^{\dagger}]_{\pm} = 0$$

$$[a,b]_{\pm} = [a,b^{\dagger}]_{\pm} = [a^{\dagger},b]_{\pm} = [a^{\dagger},b^{\dagger}]_{\pm} = 0\,. \tag{8.16}$$

Nieokreślone pozostają tylko dwie relacje, dla których przyjmiemy

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}\alpha}, a^{\dagger}_{\mathbf{q}\beta}]_{\pm} &= f_a(\mathbf{k})\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \\ [b_{\mathbf{k}\alpha}, b^{\dagger}_{\mathbf{q}\beta}]_{\pm} &= f_b(\mathbf{k})\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})\,. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Podstawiając te równości do ostatniej relacji przemienności (8.15) i wykonując wprowadzone delty, otrzymamy

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_A(x), \hat{\overline{\psi}}_B(y)]_{\pm} &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3} \Big\{ f_a(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)} \sum_{\alpha=1}^{2} u_A(k,\alpha)\,\overline{u}_B(k,\alpha) \\ &\qquad \pm f_b(\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{ik(x-y)} \sum_{\alpha=1}^{2} v_A(k,\alpha)\,\overline{v}_B(k,\alpha) \Big\}. \end{aligned}$$

Wykorzystując związki (8.12) przekonujemy się, że prawa strona jest jawnie niezmiennicza względem przekształceń Poincarego, gdy

$$f_a(\mathbf{k}) = f_b(\mathbf{k}) = 1\,. \tag{8.18}$$

Wtedy bowiem

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_A(x), \hat{\overline{\psi}}_B(y)]_{\pm} &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3} \Big\{ (\not{k}+m)\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)} \pm (\not{k}-m)\,\mathrm{e}^{ik(x-y)} \Big\}_{AB} \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{AB} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3} \Big\{ \mathrm{e}^{-ik(x-y)} \mp \mathrm{e}^{ik(x-y)} \Big\}, \end{aligned} \tag{8.19}$$

gdzie $\not{\partial}_x = \gamma^{\mu}\partial/\partial x_{\mu}$. Zauważmy zmianę znaków pod całką w ostatniej linijce, teraz antykomutatorowi odpowiada górny znak minus.

Pozostaje wybór typu relacji przemienności. Tak jak dla pola skalarnego przyjmujemy zasadę mikroprzyczynowości, żądając by

$$[\hat{\psi}_A(x), \hat{\overline{\psi}}_B(y)]_{\pm} = 0 \qquad \text{dla} \qquad (x-y)^2 < 0\,. \tag{8.20}$$

Dla zdarzeń przestrzennopodobnych, w układzie, w którym $x-y=(0,\mathbf{x}-\mathbf{y})$, relacja (8.19) przyjmuje następującą postać

$$[\hat{\psi}_A(x),\hat{\overline{\psi}}_B(y)]_\pm = (i\partial\!\!\!/_x + m)_{AB}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\left(\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \mp \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right).$$

Rozdzielając całkę na sumę dwóch całek i zamieniając $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$ w drugiej z nich przekonujemy się, że prawa strona znika tylko przy wyborze znaku minus, tym razem odpowiadającemu antykomutatorowi, który oznaczymy: $[\cdots]_+ = \{\cdots\}$.

Udowodniliśmy więc, że pola Diraca muszą być kwantowane przy pomocy **antykomutatorów**, a podstawowe relacje przemienności to

$$\{\hat{\psi}_A(x),\hat{\psi}_B(y)\} = \{\hat{\overline{\psi}}_A(x),\hat{\overline{\psi}}_B(y)\} = 0$$

$$\{\hat{\psi}_A(x),\hat{\overline{\psi}}_B(y)\} = (i\partial\!\!\!/_x + m)_{AB}\, i\Delta(x-y)\,, \qquad (8.21)$$

gdzie dystrybucja $i\Delta$ jest zdefiniowana we wzorze (7.27).

Z relacji (8.21) wynika, że operatory $(a,a^\dagger)$ i $(b,b^\dagger)$ są dwoma niezależnymi układami **fermionowych** operatorów kreacji i anihilacji,

$$\{a_{\mathbf{k}\alpha},a_{\mathbf{q}\beta}\} = 0 \qquad \{b_{\mathbf{k}\alpha},b_{\mathbf{q}\beta}\} = 0 \qquad (8.22)$$

$$\{a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha},a^\dagger_{\mathbf{q}\beta}\} = 0 \qquad \{b^\dagger_{\mathbf{k}\alpha},b^\dagger_{\mathbf{q}\beta}\} = 0$$

$$\{a_{\mathbf{k}\alpha},a^\dagger_{\mathbf{q}\beta}\} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \qquad \{b_{\mathbf{k}\alpha},b^\dagger_{\mathbf{q}\beta}\} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q})\,.$$

Prowadzą one do układu cząstek i antycząstek spełniających zakaz Pauliego.

8.3 Stany wielocząstkowe i operacje symetrii

Podobnie jak w przypadku bozonowym, zdefiniujmy najpierw stan próżni

$$a_{\mathbf{k}\alpha}|0\rangle = b_{\mathbf{k}\alpha}|0\rangle = 0 \qquad (8.23)$$

dla każdego modu $(\mathbf{k}\alpha)$. Stany wielocząstkowe tworzy się poprzez działanie operatorów kreacji, na przykład dla stanu dwucząstkowego

$$|\mathbf{k}_1\alpha_1 a,\mathbf{k}_2\alpha_2 b\rangle = a^\dagger_{\mathbf{k}_1\alpha_1} b^\dagger_{\mathbf{k}_1\alpha_2}|0\rangle\,, \qquad (8.24)$$

Przy przestawianiu tych cząstek, ze względu na reguły antykomutacji (8.22), następuje zmiana znaku stanu. Natomiast warunek $(a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha})^2 = (b^\dagger_{\mathbf{k}\alpha})^2 = 0$ powoduje, że może istnieć co najwyżej jedna cząstka o danych liczbach kwantowych. W ten sposób zakaz Pauliego jest wbudowany w reguły antykomutacji (8.22) i generowane cząstki są fermionami.

Wzajemnie komutujące operatory liczby cząstek, energii-pędu i ładunku są zdefiniowane tak jak dla pola skalarnego

$$
\begin{aligned}
N &= \sum_{\alpha=1,2} \int d^3\mathbf{p}\, (a^\dagger_{\mathbf{p}\alpha} a_{\mathbf{p}\alpha} + b^\dagger_{\mathbf{p}\alpha} b_{\mathbf{p}\alpha}) \\
P^\mu &= \sum_{\alpha=1,2} \int d^3\mathbf{p}\, p^\mu\, (a^\dagger_{\mathbf{p}\alpha} a_{\mathbf{p}\alpha} + b^\dagger_{\mathbf{p}\alpha} b_{\mathbf{p}\alpha}) \\
Q &= \sum_{\alpha=1,2} \int d^3\mathbf{p}\, e\, (a^\dagger_{\mathbf{p}\alpha} a_{\mathbf{p}\alpha} - b^\dagger_{\mathbf{p}\alpha} b_{\mathbf{p}\alpha}) \qquad (8.25)
\end{aligned}
$$

Dla stanu próżni zachodzi

$$
N|0\rangle = P^\mu|0\rangle = Q|0\rangle = 0. \qquad (8.26)
$$

Spektrum energetyczne jest ograniczone od dołu przez zerową wartość energii próżni. Nie ma więc problemów z ujemnymi energiami w próżni Diraca. Jak zobaczymy poniżej oba typy cząstek generowanych przez operatory a i b są traktowane w pełni symetrycznie.

Łatwo sprawdzić, że dla fermionowych operatorów kreacji i anihilacji słuszne są te same reguły przestawiania z operatorami (8.25) co dla operatorów bozonowych

$$
\begin{aligned}
&[P^\mu, a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}] = k^\mu a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} \qquad && [P^\mu, b^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}] = k^\mu b^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} \\
&[P^\mu, a_{\mathbf{k}\alpha}] = -k^\mu a_{\mathbf{k}\alpha} \qquad && [P^\mu, b_{\mathbf{k}\alpha}] = -k^\mu b_{\mathbf{k}\alpha} \qquad (8.27)
\end{aligned}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&[Q, a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}] = e\, a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} \qquad && [Q, b^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}] = (-e)\, b^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} \\
&[Q, a_{\mathbf{k}\alpha}] = -e\, a_{\mathbf{k}\alpha} \qquad && [Q, b_{\mathbf{k}\alpha}] = -(-e)\, b_{\mathbf{k}\alpha}. \qquad (8.28)
\end{aligned}
$$

Tak więc a jest antycząstką b (lub na odwrót). Operator $a^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}$ kreuje, natomiast $a_{\mathbf{k}\alpha}$ anihiluje cząstkę o czteropędzie k^μ i ładunku e. Podobnie $b^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}$ kreuje, a $b_{\mathbf{k}\alpha}$ anihiluje cząstkę o czteropędzie k^μ i ładunku $-e$. Dodatkowo α określa polaryzację cząstek.

Ćwiczenie 43

Korzystając z relacji (8.22) udowodnić reguły komutacji (8.27) i (8.28).

Analogicznie jak dla pola skalarnego, powyższe relacje przestawiania pozwalają udowodnić, że operator P^μ jest generatorem czterowymiarowych translacji,

$$
\begin{aligned}
e^{ia_\mu P^\mu}\, \hat{\psi}(x)\, e^{-ia_\mu P^\mu} &= \hat{\psi}(x+a) \\
e^{ia_\mu P^\mu}\, \hat{\overline{\psi}}(x)\, e^{-ia_\mu P^\mu} &= \hat{\overline{\psi}}(x+a), \qquad (8.29)
\end{aligned}
$$

a operator ładunku Q jest generatorem globalnej transformacji cechowania:

$$\mathrm{e}^{i\lambda Q}\,\hat{\psi}(x)\,\mathrm{e}^{-i\lambda Q} = \mathrm{e}^{-i\lambda e}\,\hat{\psi}(x)$$

$$\mathrm{e}^{i\lambda Q}\,\hat{\overline{\psi}}(x)\,\mathrm{e}^{-i\lambda Q} = \mathrm{e}^{i\lambda e}\,\hat{\overline{\psi}}(x)\,. \tag{8.30}$$

Rówanie Diraca dla pola spinorowego oraz reguły przestawiania (8.21) są niezmiennicze ze względu na powyższe transformacje symetrii.

Warunek (8.26) anihilacji próżni przez generatory P^μ i Q oznacza, że stan próżni jest niezmienniczy względem generowanych przez nie transformacji symetrii

$$\mathrm{e}^{ia_\mu P^\mu}\,|\,0\,\rangle = \mathrm{e}^{i\lambda Q}\,|\,0\,\rangle = |\,0\,\rangle\,, \tag{8.31}$$

o czym łatwo się przekonać rozwijając eksponenty w szereg, na przykład

$$\left(1 + ia_\mu P^\mu + \frac{(ia_\mu P^\mu)^2}{2!} + \dots\right)|\,0\,\rangle = |\,0\,\rangle\,.$$

Jedynym czynnikiem nie anihilującym stanu próżni jest operator jednostkowy.

W teorii ze *spontanicznie złamaną symetrią* stan próżni nie jest niezmienniczy względem operacji symetrii,

$$\mathrm{e}^{i\alpha_a T^a}\,|\,0\,\rangle \neq |\,0\,\rangle\,,$$

i co najmniej jeden generator transformacji symetrii T^a nie anihiluje próżni

$$T^a\,|\,0\,\rangle \neq 0\,. \tag{8.32}$$

Mechanizm ten odgrywa podstawową rolę w teorii oddziaływań elektrosłabych, generując masę cząstek, na przykład bozonów pośredniczących W i Z.

8.4 Fermionowy propagator Feynmana

Policzmy następującą wartość średnią dla swobodnych operatorów pola (8.14) z fermionowymi operatorami kreacji i anihilacji

$$\begin{aligned}
\langle 0\,|\,\hat{\psi}_A(x)\,\hat{\overline{\psi}}_B(y)\,|\,0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\sum_\alpha u_A(k,\alpha)\,\overline{u}_B(k,\alpha) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\,(\not{k} + m)_{AB}\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)} \\
&= (i\not{\partial}_x + m)_{AB}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\,,
\end{aligned} \tag{8.33}$$

gdzie w powyższych wyrażeniach $k=(E_k,\mathbf{k})$. Podobnie dla wartości średniej z przestawionymi polami otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\langle 0|\hat{\overline{\psi}}_B(y)\,\hat{\psi}_A(x)\,|0\rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{ik(x-y)}\sum_\alpha v_A(k,\alpha)\,\overline{v}_B(k,\alpha) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\,(\not k - m)_{AB}\,\mathrm{e}^{ik(x-y)} \\
&= -(i\not\partial_x + m)_{AB}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\,\mathrm{e}^{ik(x-y)}\,. \qquad (8.34)
\end{aligned}$$

Ze względu na pojawiający się znak minus w ostatnim wyrażeniu zdefiniujemy propagator Feynmana dla fermionów S_F inaczej niż dla bozonów

$$\begin{aligned}
S_F(x,y) &= \langle 0|\,\mathrm{T}\,\hat{\psi}(x)\,\hat{\overline{\psi}}(y)\,|0\rangle \qquad (8.35) \\
&\equiv \langle 0|\,\hat{\psi}(x)\,\hat{\overline{\psi}}(y)\,|0\rangle\,\Theta(x^0-y^0) - \langle 0|\,\hat{\overline{\psi}}(y)\,\hat{\psi}(x)\,|0\rangle\,\Theta(y^0-x^0)\,,
\end{aligned}$$

gdzie opuściliśmy wskaźniki spinorowe. Tak więc przestawienie dwóch pól fermionowych w iloczynie chronologicznym prowadzi do zmiany znaku. Podstawiając wyrażenia (8.33) i (8.34) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
S_F(x,y) &= (i\not\partial_x + m)\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_k(2\pi)^3}\Big\{\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\Theta(x^0-y^0) + \mathrm{e}^{ik(x-y)}\Theta(y^0-x^0)\Big\} \\
&= (i\not\partial_x + m)\,D_F(x-y)\,, \qquad (8.36)
\end{aligned}$$

gdzie powyżej $k=(E_k,\mathbf{k})$, a D_F jest propagatorem bozonowym (7.67). Po jego podstawieniu, znajdziemy

$$\begin{aligned}
S_F(x-y) &= (i\not\partial_x + m)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\,\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-ik(x-y)}\,\frac{i(\not k + m)}{k^2-m^2+i\epsilon}\,, \qquad (8.37)
\end{aligned}$$

gdzie tym razem $k=(k^0,\mathbf{k})$. Stąd reprezentacja pędową propagatora fermionowego

$$\tilde{S}_F(k) = \frac{i(\not k + m)}{k^2-m^2+i\epsilon}\,. \qquad (8.38)$$

Działając operatorem $(i\not\partial_x - m)$ po obu stronach równania (8.37) otrzymujemy

$$(i\not\partial_x - m)\,S_F(x-y) = -(\Box + m^2)\,D_F(x-y) = i\,\delta^4(x-y)\,. \qquad (8.39)$$

Rozdział 9

Pola oddziaływujące

9.1 Formalizm Lagrange'a

Rozważmy układ mechaniczny o N stopniach swobody, opisany przy pomocy zmiennych uogólnionych $q_n(t)$, $n=1,2,...,N$. Równania dynamiczne dla takiego układu znajdziemy korzystając z zasady stacjonarnego działania

$$S[q_n] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_n(t), \dot{q}_n(t))\,, \tag{9.1}$$

gdzie $\dot{q}_n = dq_n/dt$ są uogólnionymi prędkościami. Wielkość L nazywamy funkcją Lagrange'a, w skrócie *lagranżjanem.* Działanie S jest funkcjonałem, przyporządkowuje ono zbiorowi funkcji czasu liczbę, wartość całki (9.1).

Trajektoria rzeczywista układu, $\bar{q}_n(t)$, spełnia warunek stacjonarności działania. Warunek ten oznacza, że dla każdej trajektorii porównawczej, ifinitezymalnie bliskiej trajektorii rzeczywistej: $\bar{q}_n(t) + \delta q_n(t)$, zachodzi

$$\delta S \equiv S[\bar{q}_n + \delta q_n] - S[\bar{q}_n] = 0\,, \tag{9.2}$$

przy warunku brzegowym:

$$\delta q_n(t_1) = \delta q_n(t_2) = 0\,. \tag{9.3}$$

Rozwijając larganżjan dla trajektorii porównawczej z dokładnością do pierwszego rzędu

$$L(\bar{q}_n + \delta q_n, \dot{\bar{q}}_n + \delta \dot{q}_n) = L(\bar{q}_n, \dot{\bar{q}}_n) + \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_n}\delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_n}\delta \dot{q}_n\,, \tag{9.4}$$

a następnie podstawiając do (9.2) otrzymamy

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_n}\,\delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_n}\,\delta \dot{q}_n \right\} = 0\,. \tag{9.5}$$

W powyższych wyrażeniach stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina. Zapisując drugi wyraz przy pomocy reguły Leibnitza

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_n}\,\delta \dot{q}_n = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_n}\,\delta q_n\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_n}\right)\delta q_n\,, \tag{9.6}$$

znajdziemy

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_n} \right) \delta q_n + \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_n} \, \delta q_n \right) = 0 \,. \tag{9.7}$$

Druga całka znika gdyż spełniony jest warunek brzegowy (9.3). Ostatecznie, ze względu na dowolność wariacji δq_n, otrzymujemy równania *Eulera-Lagrange'a* dla trajektorii rzeczywistej

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \,. \tag{9.8}$$

W równaniach tych opuściliśmy dodatkowy wskaźnik nad oznaczeniem trajektorii.

9.2 Formalizm Hamiltona i kwantowanie kanoniczne

Wielkości

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}(q, \dot{q}) \tag{9.9}$$

są nazywane pędemi uogólnionymi. Zależą one, tak jak lagranżjan L, od położeń i prędkości. Po odwróceniu powyższych relacji otrzymujemy

$$\dot{q}_n = \dot{q}_n(q, p). \tag{9.10}$$

Skonstruujmy następnie hamiltonian zależny tylko od położeń i pędów

$$H(q,p) = p_n \, \dot{q}_n(q,p) - L(q_n, \dot{q}_n(q,p)) \,. \tag{9.11}$$

Równania ruchu dla trajektorii $(q_n(t), p_n(t))$ w przestrzeni fazowej to równania *Hamiltona*

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{dq_n}{dt} \qquad\qquad \frac{\partial H}{\partial p_n} = -\frac{dp_n}{dt} \,. \tag{9.12}$$

Wyprowadza się je różniczkując hamiltonian po pędach i położeniach, a następnie wykorzystując równania Eulera–Lagrange'a i relację (9.9). Równania te są podstawą formalizmu hamiltonowskiego opisu dynamiki układu mechanicznego.

Wprowadzając nawiasy Poissona

$$\{\, \cdot \,, \cdot \,\} = \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial q_n} \frac{\partial}{\partial p_n} - \frac{\partial}{\partial p_n} \frac{\partial}{\partial q_n} \right) , \tag{9.13}$$

zapiszemy równania Hamiltona w następujący sposób

$$\frac{dq_n}{dt} = \{q_n \,, H\} \qquad\qquad \frac{dp_n}{dt} = \{p_n \,, H\} \,. \tag{9.14}$$

Nawiasy Poissona dla położeń i pędów wynoszą

$$\{q_i \,, q_j\} = 0 \,, \qquad \{p_i \,, p_j\} = 0 \,, \qquad \{q_i \,, p_j\} = \delta_{ij} \,. \tag{9.15}$$

Schemat kwantowania układów klasycznych oparty na sformułowaniu hamiltonowskim, w którym zastępujemy wielkości dynamicznych operatorami, a nawiasy Poissona komutatorami,

$$\{\cdot,\cdot\} \quad\to\quad \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot], \tag{9.16}$$

nazywamy *kwantowaniem kanonicznym*. Nawiasy Poissona dla pędów i położeń (9.15) przechodzą w kanoniczne reguły komutacji dla operatorów położenia $\hat{q}_i$ i pędu $\hat{p}_i$:

$$[\hat{q}_i,\hat{q}_j]=0, \qquad [\hat{p}_i,\hat{p}_j]=0, \qquad [\hat{q}_i,\hat{p}_j]=i\hbar\delta_{ij}. \tag{9.17}$$

Odwrócenie relacji między pędami i prędkościami (9.10), prowadzące do formalizmu hamiltonowskiego, nie zawsze jest możliwe. Mamy wtedy do czynienia z więzami, czyli relacjami między pędami i położeniami, w których nie występują prędkości. Z taką sytuacją spotykamy się w teoriach z symetrią cechowania. Sposób konstrukcji formalizmu hamiltonowskiego w tym przypadku został podany przez Diraca.

Przykładem lagranżjanu dla układu cząstek punktowych o masie m, oddziaływujących przy pomocy potencjału V jest

$$L=\sum_n \frac{m\dot{q}_n^2}{2}-V(q_n), \tag{9.18}$$

a hamiltonian wynosi

$$H=\sum_n \frac{p_n^2}{2m}+V(q_n). \tag{9.19}$$

Ćwiczenie 44

Znaleźć równania Eulera–Lagrange'a i Hamiltona dla takiego układu.

9.3 Formalizm Largange'a dla pól klasycznych

Pole klasyczne $\phi(x)=\phi(t,\mathbf{x})$ może być interpretowane jako układ mechaniczny o nieskończonej liczbie stopni swobody. Formalna analogia polega na potraktowaniu zmiennej przestrzennej $\mathbf{x}$ jako ciągły wskaźnik numerujący stopień swobody:

$$q_n(t) \qquad\longleftrightarrow\qquad \phi_{\mathbf{x}}(t)\equiv\phi(t,\mathbf{x}). \tag{9.20}$$

Działanie dla takiego układu to funkcjonał pola

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int_{t_1}^{t_2} dt\,L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}(\phi_{\mathbf{x}}(t),\dot{\phi}_{\mathbf{x}}(t),\nabla\phi_{\mathbf{x}}(t)) \\ &= \int_\Omega d^4x\,\mathcal{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)), \end{aligned} \tag{9.21}$$

gdzie obszar czasoprzestrzeni Ω jest ograniczony dwiema trójwymiarowymi powierzchniami czasowymi $\Sigma_1(t=t_1)$ i $\Sigma_2(t=t_2)$. Całkowanie $d^3\mathbf{x}$ odpowiada sumowaniu po stopniach swobody.

Wielkość $\mathcal{L}$ jest nazywana gęstością lagranżjanu. Przy jej pomocy łatwo sformułować warunku niezmienniczości lorentzowskiej dla klasycznej teorii pola, wystarczy bowiem by $\mathcal{L}$ był skalarem. Równania Eulera–Lagrange'a będą wtedy niezmiennicze względem transformacji Lorentza w przypadku układu zamkniętego, lub współzmiennicze w przypadku występowania zewnętrznego pola o charakterze geometrycznym.

Równania Eulera–Lagrange'a wyprowadza się analogicznie jak dla przypadku mechnicznego. Zmiana działania dla dowolnej infinitezmalnej wariacji pola rzeczywistego: $\phi(x)+\delta\phi(x)$, wynosi zero

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\Omega d^4x \,\{\mathcal{L}(\phi+\delta\phi, \partial_\mu\phi+\delta\partial_\mu\phi)-\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\} \\ &= \int_\Omega d^4x \left\{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\,\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\,\delta(\partial_\mu\phi)\right\} = 0\,, \end{aligned} \tag{9.22}$$

gdzie rozwinęliśmy gęstość lagranżjanu z dokładnością do wyrażeń liniowych w wariacjach pola. Spełniają one na brzegu obszaru Ω warunki

$$\delta\phi(\Sigma_1) = \delta\phi(\Sigma_2) = 0\,, \tag{9.23}$$

będące analogiem znikania wariacji trajektorii układu mechanicznego (9.3). Wariacja pochodnej pola we wzorze (9.22) jest równa pochodnej wariacji, gdyż różniczkując wariację pola otrzymujemy

$$\partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu(\phi'-\phi) = \partial_\mu\phi' - \partial_\mu\phi \equiv \delta(\partial_\mu\phi)\,. \tag{9.24}$$

Możemy więc drugi wyraz pod całką (9.22) zapisać w następującej formie

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\,\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\,. \tag{9.25}$$

Podstawiając to wyrażenie do (9.22), otrzymamy

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left\{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right)\right\}\delta\phi + \int_\Omega d^4x\,\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi\right) = 0\,.$$

Druga całka na mocy twierdzenia Stokesa jest określona na brzegu obszaru Ω, tworzonym przez powierzchnie czasowe $\Sigma_{1,2}$ oraz powierzchnię przestrzenną w nieskończoności:

$$\int_{\partial\Omega} d\Sigma^\mu\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\,\delta\phi\,. \tag{9.26}$$

Całka ta jest równa zeru ze względu na warunek znikania wariacji pól (9.23) oraz dostatecznie szybkie znikanie pól w przestrzennej nieskończoności. Wariacji $\delta\phi$ jest dowolna, stąd otrzymujemy równania ruchu Eulera–Lagrange'a:

$$\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = 0\,. \tag{9.27}$$

Równania ruch nie zmianiają się jeśli do lagranżjanu dodamy pełną czterodywergencję

$$\mathcal{L} \quad \to \quad \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu \,. \tag{9.28}$$

Działanie S ulega wtedy zmianie o wartość całki na brzegu obszaru Ω. Ta jednak nie zmienia się przy wariacji pola ze względu na warunek (9.23), co nie wpływa na wariację δS. Człony brzegowe związane z pełną czterodywergencją odgrywają ważną rolę w teorii kwantowej, w sytuacji gdy charakteryzują nietrywialne własności topologiczne konfiguracji pól.

Formalizm hamiltonowski dla pól można skonstruować podobnie jak w mechanice klasycznej, definiując uogólnione pędy

$$\pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_t \phi)} \,, \tag{9.29}$$

następnie odwracając tę relację ze względu na prędkości: $\partial_t \phi = g(\phi, \nabla\phi, \pi)$, by skonstruować gęstość hamiltonianu,

$$\mathcal{H} = \pi \, \partial_t \phi - \mathcal{L} \,, \tag{9.30}$$

z podstawionymi prędkościami jako funcjami pędów i położen. W teoriach z lokalną symetrią cechowania nie można odwrócić relacji (9.29) dla wszystkich prędkości, gdyż pojawiają się więzy, czyli związki między położeniami i pędami bez udziału prędkości. Musimy wtedy stososwać sformułowanie Diraca formalizmu hamiltonowskiego z więzami.

Kwantowanie kanoniczne klasycznej teorii pola polega na narzuceniu równoczasowych kanonicznych reguł komutacji na operatory pola, analogicznych do związków (9.17),

$$\begin{aligned} \big[\,\hat{\phi}(\mathbf{x},t)\,,\,\hat{\phi}(\mathbf{y},t)\,\big] \;&=\; \big[\,\hat{\pi}(\mathbf{x},t)\,,\,\hat{\pi}(\mathbf{y},t)\,\big] = 0 \\ \big[\,\hat{\phi}(\mathbf{x},t)\,,\,\hat{\pi}(\mathbf{y},t)\,\big] \;&=\; i\hbar\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \end{aligned} \tag{9.31}$$

Ćwiczenie 45

Udowodnić, że dla swobodnego pola skalarnego reguły (9.31) można otrzymać z relacji (7.23).

Poniżej podajemy przykłady lagranżjanów pól swobodnych.

- Rzeczywiste pole skalarne:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 \,. \tag{9.32}$$

- Zespolone pole skalarne:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\overline{\phi})(\partial^\mu\phi) - m^2\,\overline{\phi}\,\phi \,. \tag{9.33}$$

- Pole bispinorowe Diraca:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi\right] - m\overline{\psi}\psi\,. \tag{9.34}$$

Lagranżjan Dirac zapisuje się najczęściej w niezbyt poprawnej, ale bardziej zwartej formie

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi\,. \tag{9.35}$$

Nie jest on rzeczywisty, ale prowadzi do równania Diraca. Lagranżjan (9.35) można również zapisać przy pomocy pól chiralnych: $\psi = \psi_L + \psi_R$. Otrzymujemy wtedy

$$\mathcal{L} = i(\overline{\psi}_L \not{\partial}\psi_L + \overline{\psi}_R \not{\partial}\psi_R) - m(\overline{\psi}_L\psi_R + \overline{\psi}_R\psi_L)\,, \tag{9.36}$$

gdzie $\not{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$. Jak widzimy człon kinetyczny nie miesza składowych bispinora o różnych chiralnościach. Czyni to natomiast człon masowy.

Ćwiczenie 46

Pokazać, że równanie Kleina–Gordona oraz równanie Diraca są równaniami ruchu Eulera–Lagrange'a dla powyższych lagranżjanów.

9.4 Twierdzenie Noether a prądy

Niech pole lub zespół pól ϕ spełnia równania ruchu (9.27). Rozważmy jednoparametrową ciągłą transformację pól, która nie zmienia gęstości lagranżjanu (w ogólności działania). Dla infinitezymalnej wartości parametru transformacji ϵ

$$\phi \;\;\rightarrow\;\; \phi + \delta\phi(\epsilon)\,, \tag{9.37}$$

wariacja lagranżjanu wynosi zero:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \\ &= \left\{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\right)\right\}\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{9.38}$$

Ponieważ rozważamy transformację pól spełniających rówanania Eulera–Lagrange'a, wyrażenie w pierwszym nawiasie znika. W związku z tym spełnione jest prawo zachowania prądu:

$$\partial_\mu j^\mu = 0\,, \qquad\qquad j^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\,. \tag{9.39}$$

Tak więc z każdą ciągłą jednoparametrową transformacją symetrii lagranżjanu związany jest zachowany prąd. Jest to treść twierdzenia Noether. Równanie ciągłości (9.39) pozwala zdefiniować zachowany w czasie ładunek:

$$Q(t) = \int d^3\; j^0(t,\mathbf{x})\,, \qquad\qquad \frac{dQ}{dt} = 0\,. \tag{9.40}$$

Ćwiczenie 47
Korzystając z równania ciągłości udowodnić zachowanie ładunku (9.40).

Lagranżjan pola Diraca (9.34) jest niezmienniczy względem globalnej transformacji cechowania z rzeczywistym parametrem λ:

$$\psi' = \mathrm{e}^{-i\lambda}\psi\,, \qquad \overline{\psi}' = \overline{\psi}\,\mathrm{e}^{i\lambda}\,, \tag{9.41}$$

którym odpowiadają infnitezymalne wariacje $\delta\psi = -i\lambda\psi$ oraz $\delta\overline{\psi} = i\lambda\overline{\psi}$. Obliczając (9.39) znajdziemy zachowany prąd odpowiadający tej transformacji

$$j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,, \qquad \partial_\mu j^\mu = 0\,. \tag{9.42}$$

Jest to wektorowy prąd Diraca (5.40), dyskutowany w rozdziale 5.3. Odpowiadający mu zachowany ładunek to

$$Q = \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\psi\,, \qquad \frac{dQ}{dt} = 0\,. \tag{9.43}$$

Dla bezmasowej cząstki Diraca istnieje druga globalna transformacja cechowania z macierzą γ^5 będąca symetrią lagranżjanu (9.34):

$$\psi' = \mathrm{e}^{-i\lambda\gamma^5}\psi\,, \qquad \overline{\psi}' = \overline{\psi}\,\mathrm{e}^{i\lambda\gamma^5}\,, \tag{9.44}$$

z wariacjami $\delta\psi = -i\lambda\gamma^5\psi$ oraz $\delta\overline{\psi} = i\lambda\overline{\psi}\gamma^5$. Postępując tak jak powyżej znajdziemy zachowany prąd aksjalny (5.41)

$$j^\mu_A = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\,, \qquad \partial_\mu j^\mu_A = 0\,, \tag{9.45}$$

z ładunkiem aksjalnym

$$Q_A = \int d^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger\gamma^5\psi\,, \qquad \frac{dQ_A}{dt} = 0\,. \tag{9.46}$$

Ćwiczenie 48
Udowodnić, że transformacja (9.44) jest symetrią dla bezmasowego lagranżjanu (9.34).

Ćwiczenie 49
Pokazać, że globalna transformacja cechowania (9.41) dla zespolonych pól skalarnych jest symetrią lagranżjanu (9.33), a zachowany prąd ma postać:

$$j_\mu = i\left\{(\partial_\mu\overline{\phi})\,\phi - (\partial_\mu\phi)\,\overline{\phi}\right\}\,. \tag{9.47}$$

Rozdział 10

Globalne symetrie cechowania

10.1 Symetria izospinowa

Globalne transformacje cechowania (9.41) tworzą przemienną grupę $U(1)$, będącą zbiorem liczb zespolonych postaci: $U(\lambda) = \exp\{-i\lambda\}$, z działaniem grupowym

$$U(\lambda_1)\,U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2)\,. \tag{10.1}$$

Transformację cechowania można uogólnić na przypadek grup nieprzemiennych (*nieabelowych*). Dla ustalenia uwagi rozpatrzymy grupę $SU(2)$ złożoną z unitarnych macierzy o wymiarze 2×2 i wyznaczniku 1. Jest to grupa tzw. spinu izotopowego – **izospinu**, wprowadzona przez Heisenberga do opisu oddziaływań jądrowych. Punktem wyjściowym są dwa pola Diraca, opisujące proton i neutron: ψ_p i ψ_n. Tworzą one jeden stan, multiplet

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \tag{10.2}$$

Macierz $\hat{T}_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$ jest operatorem trzeciej składowej izospinu. Proton to stan odpowiadający wartości własnej izospinu $\hat{T}_3$ równej $\frac{1}{2}$, natomiast neutron to stan o izospinie $-\frac{1}{2}$.

Oddziaływania jądrowe nierozróżniają protonu i neutronu, stąd pomysł by lagranżjan dla tych oddziaływań był niezmienniczy ze względu na tworzenie kombinacji liniowych pól protonu i neutronu:

$$\begin{pmatrix} p' \\ n' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

gdzie $U \in SU(2)$. W szczególności, poniższa macierz z grupy $SU(2)$ zamienia proton z neutronem

$$\begin{pmatrix} p' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ -p \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

Zanim przedstawimy lagranżjan dla oddziaływań jądrowych nukleonów z pionami, przedyskutujmy własności grupy $SU(2)$.

10.1.1 Grupa $SU(2)$

Dowolny element grupy $SU(2)$ można zapisać w postaci

$$U = \mathrm{e}^{i\omega}, \tag{10.5}$$

gdzie ω jest dwuwymiarową macierzą. Jej postać znajdziemy z warunku unitarności, rozwijając w szereg eksponenty

$$\begin{aligned} 1 = UU^\dagger &= \left(1 + i\omega + \tfrac{1}{2}(i\omega)^2 + ...\right)\left(1 - i\omega^\dagger + \tfrac{1}{2}(-i\omega^\dagger)^2 + ...\right) \\ &= 1 + i(\omega - \omega^\dagger) - \tfrac{1}{2}\left(\omega^2 - 2\omega\omega^\dagger + (\omega^\dagger)^2\right) + ... \end{aligned} \tag{10.6}$$

Stąd warunek hermitowskości: $\omega = \omega^\dagger$. Dla macierzy unitarnych słuszny jest wzór:

$$\det U = \mathrm{e}^{i\,\mathrm{Tr}\,\omega}, \tag{10.7}$$

latwy do sprawdzenia w bazie wektorów własnych macierzy U. Warunek unormowania wyznacznika U do jedynki prowadzi do wniosku, że $\mathrm{Tr}\,\omega = 0$. Tak więc ω jest bezśladową macierzą hermitowską, którą można sparametryzować przy pomocy trzech parametrów:

$$\omega = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_3 & \omega_1 - i\omega_2 \\ \omega_1 + i\omega_2 & -\omega_3 \end{pmatrix} = \omega_1 \hat{T}^1 + \omega_2 \hat{T}^2 + \omega_3 \hat{T}^3 \tag{10.8}$$

gdzie macierze $\hat{T}_i$, będące generatorami grupy $SU(2)$, są proporcjonalne do macierzy Pauliego (2.75): $\hat{T}^a = \frac{1}{2}\sigma_a$. Spełniają one następujące związki wynikające ze wzorów (4.10):

$$[\hat{T}^a, \hat{T}^b] = i\epsilon^{abc}\hat{T}^c, \tag{10.9}$$

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{T}^a\hat{T}^b) = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{10.10}$$

Zbiór bezśladowych i hermitowskich macierzy ω tworzy *algebrę Liego* grupy $SU(2)$. Każdą taką macierz można rozłożyć rozłożyć w bazie generatorów $\hat{T}^a$. Tak więc ω tworzą przestrzeń wektorową rozpiętą na generatorach (wektorach bazowych) grupy. Ostatecznie dowolna macierz z grupy $SU(2)$ ma postać:

$$U(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \exp\{i\omega^a \hat{T}^a\}. \tag{10.11}$$

Powyższą konstrukcję można powtórzyć bez zmian dla grupy $SU(N)$, znajdując $n^2 - 1$ rzeczywistych parametrów ω^a oraz tyle samo generatorów $\hat{T}^a$. Bezśladowa, hermitowska macierz ω o wymiarze $n \times n$ ma bowiem

$$\tfrac{1}{2}(2n^2 - 2n) + (n-1) = n^2 - 1$$

niezależnych parametrów rzeczywistych. Przykładowo, grupa $SU(3)$ ma osiem parametrów.

Grupa $SU(2)$ działająca w przestrzeni liniowej zbudowanej z dubletów (10.2) jest tożsama z jej dwuwymiarową reprezentacją fundamentalną. Inną reprezentacją grupy $SU(2)$ jest trójwymiarowa reprezentacja wektorowa działająca w przestrzeni liniowej trójwymiarowych wektorów $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Utwórzmy bezśladową macierz hermitowską

$$\hat{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_3 & \pi_1 - i\pi_2 \\ \pi_1 + i\pi_2 & -\pi_3 \end{pmatrix} = \pi \cdot \sigma \,. \tag{10.12}$$

Wyznacznik tej macierzy jest równy (z dokładnością do znaku) kwadratowi długości wektora π:

$$-\det \hat{\pi} = (\pi_1)^2 + (\pi_2)^2 + (\pi_3)^2 = \pi^2 \,. \tag{10.13}$$

Transformacja $U^\dagger \hat{\pi} U$ przy pomocy $U \in SU(2)$ prowadzi do macierzy hermitowskiej i bezśladowej, gdyż

$$(U^\dagger \hat{\pi} U)^\dagger = U^\dagger \hat{\pi} U \,, \qquad\qquad \mathrm{Tr}\,(U^\dagger \hat{\pi} U) = \mathrm{Tr}\,(U U^\dagger \hat{\pi}) = \mathrm{Tr}\,\hat{\pi} = 0 \,.$$

Możemy więc nową macierz zapisać w bazie macierzy Pauliego

$$U^\dagger (\pi \cdot \sigma) U = \pi' \cdot \sigma \,, \tag{10.14}$$

gdzie $\pi' = (\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3)$. Obliczając wyznacznik obu stron znajdziemy:

$$\pi^2 = -\det(\pi \cdot \sigma) = -\det(\pi' \cdot \sigma) = \pi'^2 \,. \tag{10.15}$$

Tak więc transformacja (10.14) indukuje obrót w przestrzeni euklidesowej:

$$\pi' = O\pi \,, \tag{10.16}$$

gdzie $O \in SO(3)$, grupy trójwymiarowych macierzy rzeczywistych o wyznaczniku równym 1, spełniających relację: $O^T O = 1$.

Korzystając ze wzorów (10.14) i (10.16), łatwo można pokazać, że złożenie dwóch transformacji $U_1 U_2$ indukuje złożenie obrotów $O_1 O_2$. Grupa $SO(3)$ jest więc reprezentacją grupy $SU(2)$, zwaną reprezentacją *dołączoną*. Zauważmy, że dwóm elementom $\pm U \in SU(2)$ odpowiada jeden element $O \in SO(3)$. Związne to jest z topologicznymi własnościami obu grup. $SO(3)$ nie jest grupą jednospójną, gdyż nie każdą krzywą zamkniętą[1] można zdeformować w sposób ciągły do punktu. Tę własność posiada jednospójna grupa $SU(2)$, izomorficzna z $SO(3)$ w otoczeniu elementu jednostkowego. Jest ona uniwersalną grupą nakrywającą dla grupy $SO(3)$.

[1] Krzywa w grupie G to ciągłe odwzorowanie $t \in [0,1] \to g(t) \in G$. Dla krzywej zamkniętej $g(0) = g(1)$.

10.2 Oddziaływania nukleonów z pionami

Rozważmy dublet pól nukleonowych (10.2) oraz pole pionów opisane trzema rzeczywistymi polami skalarnymi $\pi(x) = (\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x))$. Pole to możemy również przedstawić w formie bezśladowej macierzy hermitowskiej (10.12):

$$\pi \cdot \sigma = \begin{pmatrix} \pi_3 & \pi_1 - i\pi_2 \\ \pi_1 + i\pi_2 & -\pi_3 \end{pmatrix}. \tag{10.17}$$

Pod wpływem globalnej transformacji cechowania $U \in SU(2)$ pole nukleonowe transformuje się zgodnie ze wzorem (10.3)

$$\psi' = U\,\psi\,, \qquad\qquad \overline{\psi}' = \overline{\psi}U^\dagger\,, \tag{10.18}$$

natomiast pola pionów transformują się zgodnie z regułą (10.14):

$$U\,\pi \cdot \sigma\,U^\dagger = \pi' \cdot \sigma, \tag{10.19}$$

z której wynika prawo transformacyjne (10.16) dla pól π. Innymi słowy, pole nukleonowe transformuje się przy pomocy reprezentacji fundamentalnej grupy $SU(2)$, natomiast pola pionów przy pomocy reprezentacji dołączonej.

Skonstruujmy najpierw niezmienniczy względem izospinowej transformacji cechowania lagranżjan swobodnych nukleonów:

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\psi}\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\,\psi\,. \tag{10.20}$$

Piony są pseudoskalarami, dlatego oddziaływują z pseudoskalarnym prądem nukleonów:

$$\mathcal{L}_I = -\frac{g}{\sqrt{2}}\,(i\overline{\psi}\,\gamma^5\sigma_i\,\psi)\,\pi_i = -\frac{ig}{\sqrt{2}}\,\overline{\psi}\,\gamma^5\,(\pi\cdot\sigma)\,\psi\,. \tag{10.21}$$

W ten sposób lagranżjan oddziaływania jest niezmienniczy względem odbić przestrzennych, będących symetrią oddziaływań silnych. Podobnie jak $\mathcal{L}_0$, jest on także niezmienniczy względem izospinowych transformacji cechowania.

<u>Ćwiczenie 50</u>
Udowodnić, że lagranżjan $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ jest niezmienniczy względem transformacji cechowania (10.18) i (10.19) .

Niezmienniczość cechowania dyktuje formę oddziaływań i ich relatywną siłę. Wprowadzając pola fizycznych pionów,

$$\pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\pi_1 \pm i\,\pi_2)\,, \qquad\qquad \pi_0 = \pi_3\,, \tag{10.22}$$

zapiszemy lagranżjan oddziaływania w jawny sposób:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_I &= \frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overline{p}, & \overline{n} \end{pmatrix} \gamma^5 \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\,\pi^- \\ \sqrt{2}\,\pi^+ & -\pi^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}}\,(i\overline{p}\gamma^5 p)\,\pi^0 + g\,(i\overline{p}\gamma^5 n)\,\pi^- + g\,(i\overline{n}\gamma^5 p)\,\pi^+ - \frac{g}{\sqrt{2}}\,(i\overline{n}\gamma^5 n)\,\pi^0\,. \end{aligned}$$

Stąd wynikają następujące relacje między stałymi sprzeżenia dla poszczególnych oddziaływań:

$$g_{pn\pi^-} = g_{np\pi^+} = \sqrt{2}\, g_{pp\pi^0}\,, \qquad g_{pp\pi^0} = -g_{nn\pi^0}\,, \tag{10.23}$$

dyktowane przez symetrię izospinową.

10.3 Piony jako bozony Goldstona

Pozostaje jeszcze do określenia lagranżjan dla pionów. W tym celu rozważmy oddziaływanie trzech pionów π z dodatkowym skalarnym polem mezonowym σ opisywane lagranżjanem

$$\mathcal{L}(\pi,\sigma) = \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu \pi)(\partial^\mu \pi) + \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - V(\pi,\sigma)\,, \tag{10.24}$$

gdzie potencjał oddziaływania

$$V(\pi,\sigma) = -\frac{1}{2}\,\mu^2(\pi^2+\sigma^2) + \frac{\lambda}{4}\,(\pi^2+\sigma^2)^2\,. \tag{10.25}$$

Stała sprzężenia $\lambda > 0$. Zwrócmy uwagę na "zły" znak w członie z μ^2, który nie pozwala traktować μ jako masy pól mezonowych.

Powyższy lagranżjan ma globalną symetrię cechowania $SO(4)$:

$$\begin{pmatrix} \pi' \\ \sigma' \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} \pi \\ \sigma \end{pmatrix}, \tag{10.26}$$

gdzie $O \in SO(4)$ jest obrotem w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej, którą tworzą pola mezonowe.

Zdefiniujmy stan próżni jako konfigurację pól minimalizującą wartość potencjału oddziaływania

$$V'(\pi,\sigma) = -\frac{1}{2}\,\mu^2 + \frac{\lambda}{2}\,(\pi^2+\sigma^2) = 0\,. \tag{10.27}$$

Tak określony stan próżni jest zdegenerowany, gdyż potencjał jest minimalizowany przez *zbiór* konfiguracji spełniający równanie

$$\pi^2+\sigma^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2\,, \tag{10.28}$$

dla których

$$V_{min} = -\frac{\mu^4}{4\lambda} < 0\,. \tag{10.29}$$

Jest to wartość mniejsza niż wartość potencjału dla zerowej konfiguracji pól, $V_0 = 0$. Tak więc, prawdziwy stan próżni jest określony przez niezerowe konfiguracje pól mezonowych (10.28). Zauważmy, że zbiór stanów próżni jest niezmienniczy względem transformacji symetrii lagranżjanu $SO(4)$.

Dokonajmy *spontanicznego złamania symetrii próżni* wybierając następującą konfigurację próżniową

$$\pi_0 = 0\,, \qquad\qquad \sigma_0 = v > 0\,. \tag{10.30}$$

Nie narusza to ogólności rozważań, gdyż mógłby to być dowolny kierunek, który sprowadzilibyśmy do postaci (10.30) przy pomocy transformacji cechowania. Ważne jest tylko to, że stan próżni został wyróżniony. Wybór ten łamie symetrię próżni $SO(4)$, wciąż jednak pozostawiając symetrię względem obrotów wokół osi wyznaczonej przez kierunek próżni $\phi_0 = (\mathbf{0}, v)$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ v \end{pmatrix}, \qquad A \in SO(3)\,. \tag{10.31}$$

Tak więc symetria próżni została złamana do podgrupy $SO(3) \subset SO(4)$.

Rozważmy nowe pola (π', σ'), będące fluktuacjami wokół wybranego stanu prózni,

$$\pi = \mathbf{0} + \pi'\,, \qquad\qquad \sigma = v + \sigma'\,, \tag{10.32}$$

a następnie przepiszmy lagranżjan (10.24) przy pomocy nowych pól. Część kinetyczna nie ulega zmianie, natomiast potencjał oddziaływania przyjmuje następującą postać

$$V = -\frac{1}{2}\mu^2 \left\{\pi'^2 + (v+\sigma')^2\right\} + \frac{\lambda}{4}\left\{\pi'^2 + (v+\sigma')^2\right\}^2\,. \tag{10.33}$$

Otrzymany lagranżjan jest niezmienniczy względem transformacji izospinowej $SO(3)$ pól pionów π'. Znajdźmy wyrażenia liniowe i kwadratowe w nowych polach

$$V \;=\; \left(-\mu^2 v + \lambda v^3\right)\sigma' + \left(-\tfrac{1}{2}\mu^2 + \tfrac{\lambda}{2}v^2\right)\pi'^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\mu^2 + \tfrac{3\lambda}{2}v^2\right)\sigma'^2 + \cdots\,.$$

Po podstawieniu wartości próżniowej $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ człony liniowy oraz kwadratowy dla pionów znikają, natomiast człon kwadratowy dla mezonu sigma ma teraz "dobry" znak: $V = \mu^2\sigma'^2 + \cdots$. Ostatecznie

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\pi')(\partial^\mu\pi') + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\sigma')(\partial^\mu\sigma') - \tfrac{1}{2}(2\mu^2)\,\sigma'^2 - \cdots\,. \tag{10.34}$$

gdzie człony zaznaczone kropkami opisują oddziaływania pomiędzy polami mezonowymi. Tak więc w wyniku spontanicznego złamania symetrii mezon sigma otrzymuje masę, natomiast piony pozostają bezmasowe:

$$m_\sigma = \sqrt{2}\,\mu\,, \qquad\qquad m_\pi = 0\,. \tag{10.35}$$

Trzy bezmasowe pola pionów nazywamy *bozonami Goldstona*. Ich istnienie wynika z twierdzenia Goldstona, które przedstawimy w następnym rozdziale.

Ćwiczenie 51

Znaleźć brakujące człony w lagranżjanie (10.34). Pokazać, że σ rozpada się na dwa piony.

10.4 Twierdzenie Goldstona

Bezmasowe bozony Goldstona pojawiają się w wyniku spontanicznego złamania globalnej symetrii cechowania. Ich liczba jest równa liczbie złamanych symetrii. Jest to treść twierdzenia Goldstona. Przykładowo, w poprzednim rozdziale symetria $SO(4)$ z 6 parametrami została spontanicznie złamana do symetrii $SO(3)$ z 3 parametrami. Tak więc liczba złamanych symetrii wynosi $6-3=3$, stąd trzy bezmasowe piony – bozony Goldstona.

W ogólności, rozważmy n pól skalarnych ϕ^i z lagranżjanem

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)(\partial^\mu \phi^i) - V(\phi)\,. \tag{10.36}$$

Niech $\phi_0 = (\phi_0^i)$ będzie stałym polem minimalizującym potencjał V

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \phi^i}\right|_{\phi_0} = 0\,. \tag{10.37}$$

Rozwijając potencjał wokół minimum otrzymamy

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi^i - \phi_0^i)(\phi^j - \phi_0^j)\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^i \partial \phi^j}\right|_{\phi_0} + \cdots \tag{10.38}$$

Symetryczna macierz drugich pochodnych,

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^i \partial \phi^j}\right|_{\phi_0} = M^2_{ij}\,, \tag{10.39}$$

po zdiagonalizowaniu określi masy pól. Ponieważ ϕ_0 to minimum potencjału więc wszystkie wartości własne (10.39) są dodatnie.

Rozważmy dowolną jednoparametrową podgrupę transformacji symetrii lagranżjanu (10.36) ze generatorem T^a. Dla infinitezymalnej wartości parametru ϵ otrzymujemy:

$$\phi^i \to \phi^i + \delta\phi^i = \phi^i + (\epsilon T^a)^i_j\, \phi^j\,. \tag{10.40}$$

Niezmienniczość lagranżjanu oznacza między innymi, że

$$V(\phi + \delta\phi) = V(\phi) \qquad \Rightarrow \qquad \delta\phi^i\, \frac{\partial V}{\partial \phi^i} = 0\,. \tag{10.41}$$

Różniczkując ostatnie wyrażenie po ϕ^j, a następnie kładąc $\phi = \phi_0$, mamy

$$\left.\frac{\partial\, \delta\phi^i}{\partial \phi^j}\right|_{\phi_0} \left.\frac{\partial V}{\partial \phi^i}\right|_{\phi_0} + \delta\phi^j(\phi_0)\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^i \partial \phi^j}\right|_{\phi_0} = 0\,. \tag{10.42}$$

Ze względu na warunek (10.37) pierwszy składnik w sumie znika. Ostatecznie, otrzymujemy równanie na zerowe wartości własne macierzy (10.39)

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^i \partial \phi^j}\right|_{\phi_0} \delta\phi^j(\phi_0) = 0\,. \tag{10.43}$$

Uwzględniając postać wariacji $\delta\phi^j$ ze wzoru (10.40), a następnie opuszczając parametr ϵ ze względu na jego dowolność, otrzymujemy

$$M^2_{ij}\,(T^a\phi_0)^j = 0\,. \tag{10.44}$$

Równanie to ma nietrywialne rozwiązania dla tych generatorów, które łamią symetrię próżni

$$T^a\phi_0 \neq 0\,. \tag{10.45}$$

Tak więc liczba zerowych wartości własnych macierzy mas (bezmasowych bozonów Goldstona) jest równa liczbie generatorów transformacji symetrii lagranżjanu łamiących symetrię próżni. Udowodniliśmy w ten sposób twierdzenie Goldstona dla pola klasycznego.

Ćwiczenie 52

Znaleźć macierz mas (10.39) dla potencjału (10.25), a następnie ją zdiagonalizować pokazując, że istnieją trzy kierunki o zerowych wartościach własnych, ortogonalne do kierunku pola próżni ϕ_0. Pokazać, że kierunkowi ϕ_0 odpowiada niezerowa wartość własna μ^2.

10.5 Spontaniczne łamanie symetrii chiralnej

Mechanizm spontanicznego łamania symetrii można użyć do konstrukcji efektywnej teorii oddziaływań pionów z nukleonami, rozszerzając symetrię cechowania $SO(4)$ z poprzedniego rozdziału do *symetrii chiralnej*.

Rozważmy lagranżjan dla swobodnych, *bezmasowych* pól nukleonowych (10.2)

$$\mathcal{L}_0 = i\,\overline{\psi}\,\partial\!\!\!/\,\psi = i\,(\overline{\psi}_L\,\partial\!\!\!/\,\psi_L + \overline{\psi}_R\,\partial\!\!\!/\,\psi_R)\,. \tag{10.46}$$

Lagranżjan ten jest niezmienniczy względem następującej transformacji

$$\psi_L \to A_L\,\psi_L \qquad\qquad \psi_R \to A_R\,\psi_R\,, \tag{10.47}$$

gdzie A_L i A_R są niezależnymi macierzami z grupy $SU(2)$. Jest to symetria chiralna

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \simeq SO(4)\,. \tag{10.48}$$

Pozostaje problem nadania masy nukleonom. Dodając człon masowy proporcjonalny do $\overline{\psi}\psi = \overline{\psi}_L\psi_R + \overline{\psi}_R\psi_L$ łamiemy symetrię chiralną. Możemy jednak ją utrzymać rozważając sprzężenia z polami mezonowymi (π,σ)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I &= -g\overline{\psi}\left(\sigma + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\,\pi\cdot\sigma\right)\psi \\ &= -g\overline{\psi}_L\left(\sigma + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\,\pi\cdot\sigma\right)\psi_R - \text{h.c.}\end{aligned} \tag{10.49}$$

Lagranżjan ten jest niezmienniczy względem transformacji (10.47) dla nukleonów oraz następującej transformacji dla pól mezonowych

$$U \equiv \sigma + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\,\pi\cdot\sigma \quad\to\quad U' = A_L\,U\,A_R^\dagger\,. \tag{10.50}$$

Jest to transformacja ortogonalna $SO(4)$, gdyż zachowana jest odległość

$$\sigma^2+\pi^2 = U U^\dagger\,. \tag{10.51}$$

Mamy bowiem

$$\sigma'^2+\pi'^2 = U' U'^\dagger = (A_L U A_R^\dagger)(A_R U^\dagger A_L^\dagger) = A_L(U U^\dagger) A_L^\dagger = \sigma^2+\pi^2\,.$$

Uwzględniając wkład od pól mezonowych (10.24) otrzymujemy ostateczną formę lagranżjanu

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\overline{\psi}\partial\!\!\!/\psi - g\overline{\psi}\left(\sigma+\tfrac{i}{\sqrt{2}}\gamma_5\,\pi\cdot\sigma\right)\psi \\ &+ \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\pi)(\partial^\mu\pi)+\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) - V(\pi,\sigma)\end{aligned} \tag{10.52}$$

Spontaniczne złamanie symetrii próżni (10.30) do symetrii izospinowej,

$$\pi_0 = 0\,, \qquad \sigma_0 = v > 0\,,$$

prowadzi do transformacji diagonalnych: $A_R = A_L = A$, które wciąż pozostają symetrią teorii. Tak więc, symetria chiralna została złamana do symetrii izospinowej

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \;\to\; SU(2)_I\,. \tag{10.53}$$

Mechnizm ten nadaje masę nukleonom, gdyż po wprowadzeniu nowych pól,

$$\pi = \pi'\,, \qquad \sigma = v+\sigma'\,,$$

człon $-g\sigma\overline{\psi}\psi$ w lagranżjanie (10.52) uzyskuje masę równą

$$M = gv\,. \tag{10.54}$$

Natomiast piony jako bozony Goldstona *pozostają bezmasowe*.

Mezon σ można usunąć ze spektrum czyniąc go nieskończenie ciężkim, tzn. wykonując granicę

$$\mu,\lambda\to\infty\,, \qquad v = \mu/\sqrt{\lambda} = \text{const}\,. \tag{10.55}$$

W wyniku pola mezonowe są związane nieliniowym warunkiem

$$\sigma^2+\pi^2 = v^2 = \text{const.}$$

Podstawiając $\sigma = \sqrt{v^2-\pi^2}$ do lagranżjanu swobodnego pionów, dostajemy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \tfrac{1}{2}[(\partial\pi)^2+(\partial\sigma)^2] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\partial\pi)^2+\frac{(\pi\cdot\partial\pi)^2}{v^2-\pi^2}\right] = \frac{1}{2}(\partial\pi)^2+\frac{1}{2v^2}(\pi\cdot\partial\pi)^2+\cdots\,.\end{aligned} \tag{10.56}$$

Otrzymujemy w ten sposób *nieliniowy model sigma* dla mezonów π.

Rozdział 11

Lokalna symetria cechowania

Do tej pory parametry transformacji cechowania nie zależały od punktu czasoprzestrzeni x. Rozważmy transformację lokalną, z parametrami zależnymi od x. Dla grupy abelowej $U(1)$ będą to transformacje

$$U(x) = \exp\{-ig\,\lambda(x)\}\,, \tag{11.1}$$

natomiast dla grupy nieabelowej, na przykład $SU(2)$,

$$U(x) = \exp\{-ig\,\omega^a(x)\,\hat{T}^a\}\,. \tag{11.2}$$

W obu wzorach wprowadziliśmy stała sprzężenia g, niekoniecznie tą samą. W ogólności, każda lokalna grupa cechowania wnosi własną stałą sprzężenia.

W związku z zależnością parametrów od punktu czasoprzestrzeni pojawia się trudność w skonstruowaniu lagranżjanu niezmienniczego względem lokalnych transformacji cechowania. Źródłem problemu jest prawo transformacyjne pochodnej pola. Jeśli pole ϕ (skalarne lub spinorowe) transformuje się jednorodnie

$$\phi'(x) = U(x)\,\phi(x)\,, \tag{11.3}$$

to po zróżniczkowaniu obu stron otrzymujemy:

$$\partial_\mu\phi' = U\,\partial_\mu\phi + (\partial_\mu U)\,\phi = U\left(\partial_\mu + U^{-1}\partial_\mu U\right)\phi\,. \tag{11.4}$$

Pochodna pól nie transformuje się jednorodnie tak jak pola, w związku z tym lagranżjany swobodne nie są niezmiennicze względem transformacji cechowania. Na przykład, człon kinetyczny $(\partial_\mu\overline{\phi})(\partial^\mu\phi)$ dla pola skalarnego nie jest niezmienniczy względem transformacji (11.3).

Wyjściem z problemu jest konstrukcja pochodnej kowariantnej, prowadzącej do transformacji jednorodnej dla pochodnej pola. Wprowadźmy kompensujące pole $\hat{A}_\mu(x)$, które również podlega transformacji cechowania, takiej by skompensować dodatkowy człon $U^{-1}\partial_\mu U$ po prawej stronie (11.4). Pochodna kowariantna to

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\hat{A}_\mu(x)\,. \tag{11.5}$$

Chcemy by pod wpływem transformacji cechowania pochodna kowariantna pól transformowała się tak samo jak pola:

$$D'_\mu \phi'(x) = U(x)\, D_\mu \phi(x)\,, \tag{11.6}$$

gdzie D'_μ zawiera przecechowane pole $\hat{A}'$. Warunek ten pozwoli nam znaleźć prawo transformacyjne dla pól kompensujących. Podstawiając prawo (11.3) po lewej stronie (11.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned}(\partial_\mu + ig\hat{A}'_\mu)U\phi &= U(\partial_\mu\phi) + (\partial_\mu U)\phi + ig\hat{A}'_\mu U\phi \\ &= U\left(\partial_\mu + U^{-1}\partial_\mu U + igU^{-1}\hat{A}'U\right)\phi \\ &= U\left(\partial_\mu + ig\hat{A}\right)\phi\,. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Porównując drugą i trzecią linijkę znajdujemy

$$U^{-1}\partial_\mu U + igU^{-1}\hat{A}'U = ig\hat{A}\,,$$

skąd wynika ostateczne prawo transformacyjne pól kompensujących, zwanych od tej pory *polami cechowania*

$$\hat{A}'_\mu = U\hat{A}'_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1}\,. \tag{11.8}$$

Uzupełnia ono prawo transformacyjne pól (11.3). Porównując natomiast pierwsze i ostatnie wyrażenie w (11.7) znajdziemy,

$$D'_\mu = U(x)\, D_\mu U^{-1}(x)\,. \tag{11.9}$$

Tak więc pochodna kowariantna transformuje się jednorodnie pod wpływem transformacji cechowania

Pochodna kowariantna pozwala budować lagranżjany niezmiennicze względem lokalnej transformacji cechowania. Wystarczy bowiem w lagranżjanach swobodnych zastąpić pochodną zwykła przez pochodną kowariantą:

$$\partial_\mu \;\to\; \partial_\mu + ig\hat{A}_\mu\,. \tag{11.10}$$

Przepis ten nazywa się zasadą *minimalnego sprzężenia*. Otrzymujemy w ten sposób w lagranżjanie człony co najmniej trójliniowe w polach, opisujące oddziaływanie pól ϕ z pól cechowania. Pola te mają swoją dynamikę niezależną od pól ϕ, a opisywaną lagranżjanem zbudowanym z pól $\hat{A}_\mu$. Oczywiście lagranżjan ten powinien być niezmienniczy względem transformacji cechowania (11.8). W następnych rozdziałach skonstruujemy takie lagranżjany.

11.1 Pole elektromagnetyczne

Pole elektromagnetyczne to pole cechowania grupy abelowej $U(1)$. Rozważmy dla ustalenia uwagi elektron i odpowiadające mu pole bispinorowe Diraca ψ. Symetria teorii elektronu względem lokalnych transformacji cechowania (11.1):

$$\psi'(x) = \mathrm{e}^{-ie\lambda(x)}\,\psi(x)\,, \tag{11.11}$$

gdzie $e > 0$ jest ładunkiem elementarnym, wymusza wprowadzenie pola kompensującego

$$\hat{A}_\mu(x) = A_\mu(x)\,, \tag{11.12}$$

które utożsamiamy z potencjałem elektromagnetycznym $A_\mu = (\phi, -A)$. Pochodna kowariantna (11.5) przyjmuje więc postać

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu\,, \tag{11.13}$$

a prawo transformacyjne (11.8) ma znaną z elektrodynamiki klasycznej postać transformacji cechowania

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda\,. \tag{11.14}$$

Z punktu widzenia transformacji Lorentza A_μ jest obiektem geometrycznym: czterowektorem.

Ćwiczenie 53

Wyprowadzić (11.14) dla abelowej transformacji cechowania.

Niezmienniczy względem cechowania lagranżjan Diraca powstaje po zastosowaniu zasady minimalnego sprzężenia do lagranżjanu swobodnego (9.35):

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\,\{i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m\}\,\psi\,. \tag{11.15}$$

Lagranżjan ten można zapisać w formie sumy dwuliniowego lagranżjanu swobodnego i trójliniowego lagranżjanu oddziaływania

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \overline{\psi}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi + (-e)\,(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)\,A_\mu\,. \tag{11.16}$$

Tak więc symetria względem lokalnej transfromacji cechowania prowadzi do znanego z klasycznej elektrodynamiki oddziaływania w postaci

$$\mathcal{L}_I = -e\,j^{(em)\mu}A_\mu \tag{11.17}$$

z wektorowym prądem Diraca (5.31).

Nie jest to sytuacja ogólna, jak pokazuje przykład zespolonego pola skalarnego. Zasada minimalnego sprzężenia prowadzi do lagranżjanu

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi]^\dagger\,[(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi] - m^2\,\phi^\dagger\phi\,. \tag{11.18}$$

Jak łatwo pokazać lagranżjan oddziaływania ma następującą postać

$$\mathcal{L}_I = ie\,\{(\partial_\mu\phi^\dagger)\phi - \phi^\dagger(\partial^\mu\phi)\}\,A_\mu + e^2\,\phi^\dagger A_\mu A^\mu\phi\,. \tag{11.19}$$

Ze względu na człon kwadratowy w potencjałach, nie jest on postaci $j^\mu A_\mu$ z prądem skalarnym (9.47).

Ćwiczenie 54

Wyprowadzić lagranżjan (11.19).

Lagranżjany (11.15) i (11.18) opisują oddziaływanie pól spinorowych i skalarnych z zewnętrznym (zadanym) polem elektromagnetycznym. Aby opisać dynamikę pola elektromagnetycznego należy dodać lagranżjan samego pola. Musi on być niezmienniczy ze względu na transformację cechowania (11.14), a także, co stanowi naszą podstawową zasadę, niezmienniczy względem transformacji Lorentza.

Pierwszym krokiem w tym kierunku jest zdefiniowanie *antysymetrycznego* tensora natężeń pola elektromagnetycznego

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \tag{11.20}$$

Jak łatwo sprawdzić jest on niezmienniczy względem transformacji cechowania (11.14). Natężenia pól elektrycznego E i magnetycznego B są sześcioma niezależnymi składowymi tensora $F_{\mu\nu}$:

$$E^i \;=\; F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_t A^i - \partial_i \phi \tag{11.21}$$

$$B^i \;=\; -\tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} F_{jk} = -\epsilon_{ijk}\,\partial_j A_k = \epsilon_{ijk}\,\partial_j A^k . \tag{11.22}$$

Tak więc

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{11.23}$$

Niezmienniczy względem cechowania lagranżjan swobodnego pola elektromagnetycznego jest zbudowany z niezmiennika lorentzowskiego $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \tag{11.24}$$

Drugi możliwy niezmiennik, $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}$, jest wykluczony ze względu na łamanie symetrii względem odbić przestrzennych i czasowych, porównaj dyskusję prawa transformacji symbolu epsylon w rozdziale 2.2.

Odrzucając w lagranżjanie (11.24) niewpływające na równania ruchu pełne czterodywergencje, otrzymamy

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} A_\mu \left(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu \partial^\nu\right) A_\nu , \tag{11.25}$$

gdzie $\Box = \partial_\alpha \partial^\alpha$. Dokonując wariacji δA_μ znajdujemy równania Eulera–Lagrange'a swobodnego pola elektromagnetycznego

$$\left(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu \partial^\nu\right) A_\nu = 0 , \tag{11.26}$$

które zapisać można również w formie jawnie niezmienniczej względem transfomacji cechowania

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 . \tag{11.27}$$

Ćwiczenie 55

Pokazać (11.25) oraz udowodnić równoważność równań pola (11.26) i (11.27).

Nakładając warunek cechowania Lorentza $\partial^\nu A_\nu = 0$, otrzymujemy z (11.26) bezmasowe równanie Kleina–Gordona

$$\Box A_\mu = 0\,. \tag{11.28}$$

Stąd po skwantowaniu pole elektromagnetyczne opisuje bezmasowe fotony. Cechowanie Lorentza eliminuje jedną z czterech składowych pol A_μ, wciąż jednak pozostaję swoboda cechowania

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f\,, \qquad \Box f = 0\,, \tag{11.29}$$

konsystentna zarówno z równaniami ruchu (11.28) jak i warunkiem Lorentza. Możemy ją użyć do wyeliminowania jeszcze jednej składowej pola elektromagnetycznego, pozostawiając dwie niezależne składowe. Odpowiadają one dwóm poprzecznym polaryzacjom tego pola. Przykład ten ilustruje nadmiarowość w opisie rzeczywistości fizycznej, którą wnosi symetria cechowania.

11.2 Pole wektorowe z masą

Forma langranżjanu (11.25) sugeruje, iż by nadać fotonom masę należy do langranżjanu (11.24) dodać człon masowy

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu\,. \tag{11.30}$$

Łamie on symetrię cechowania (11.14). Otrzymujemy stąd następujące równania ruchu

$$\Big(g^{\mu\nu}(\Box + m^2) - \partial^\mu \partial^\nu\Big)\, A_\nu = 0\,. \tag{11.31}$$

Działając pochodną ∂_μ po obu stronach, znajdujemy

$$m^2\, \partial_\mu A^\mu = 0\,. \tag{11.32}$$

Ponieważ $m^2 \neq 0$, z równań ruchu wynika warunek znikania czterodywergencji $\partial_\mu A^\mu = 0$. Możemy więc zapisać równania ruchu (11.31) w równoważnej formie

$$\Big(\Box + m^2\Big) A^\mu = 0\,, \qquad \partial_\mu A^\mu = 0\,. \tag{11.33}$$

Wektorowe pole z masą nazywa się polem Proca. Ma ono trzy niezależne składowe, ze względu na warunek znikania czterodywergencji pola. Dodatkowa składowa jest związana z polaryzacją podłużną pola z masą. W tym przypadku nie mamy już swobody (11.29), która eliminowała składową podłużną pola bezmasowego. Warunek ten nie jest bowiem konsystentny z pierwszym z równań ruchu (11.33).

11.3 Pole Yanga–Millsa

Rozważmy nieabelową lokalną transformację cechowania (11.2), dla ustalenia uwagi generowaną przez grupę $SU(2)$. Działa ona na dublety pól (fermionowych lub skalarnych),

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \end{pmatrix}, \tag{11.34}$$

jako reprezentacja fundamentalna

$$\psi'(x) = \mathrm{e}^{-ig\omega^a(x)\hat{T}^a}\psi(x). \tag{11.35}$$

Uogólnienie na grupę $SU(N)$ wymaga rozszerzenia dubletów do multipletów o N składowych oraz zwiekszenia liczby generatorów i parametrów transformacji do N^2-1.

Pole cechowania $\hat{A}_\mu$ jest macierzą hermitowską i bezśladową o wymiarze 2×2. Należy więc do algebry Liego grupy cechowania i może być rozłożone w bazie jej generatorów

$$\hat{A}_\mu(x) = A^a_\mu(x)\hat{T}^a = \begin{pmatrix} A^3_\mu & A^1_\mu - iA^2_\mu \\ A^1_\mu + iA^2_\mu & -A^3_\mu \end{pmatrix}. \tag{11.36}$$

Dla grupy $SU(2)$ mamy więc trzy niezależne składowe pola cechowania A^a_μ. Dla grupy $SU(N)$ to N^2-1 składowych. Pola te nazywają się polami cechowania Yanga–Millsa lub *polami kolorowymi*.

Pochodna kowariantna to

$$D_\mu = \partial_\mu + igA^a_\mu\hat{T}^a, \tag{11.37}$$

a transformacja cechowania jest zadana wzorem (11.8). Stosując zasadę minimalnego sprzężenia (11.10), skonstruujemy niezmienniczy względem cechowania lagranżjan opisujący oddziaływanie pól ψ z polami Yanga–Millsa. Na przykład, dla pól fermionowych otrzymujemy

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA^a_\mu\hat{T}^a)\psi - m\overline{\psi}\psi. \tag{11.38}$$

Lagranżjan ten możemy zapisać w znanej już formie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \{i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi\} - g(\overline{\psi}\gamma^\mu\hat{T}^a\psi)A^a_\mu. \tag{11.39}$$

Tak więc pole Yanga–Millsa oddziaływuje z kolorowymi prądami Diraca

$$\hat{j}^{a\mu} = \overline{\psi}\gamma^\mu\hat{T}^a\psi, \tag{11.40}$$

podobnie jak w przypadku abelowym (11.16).

11.4 Nieabelowy tensor natężeń

Pozostaje do skonstruowania lagranżjan samego pola Yanga-Millsa. Musimy w tym celu uogólnić definicje tensora natężenia pola cechowania (11.20). Policzmy w związku z tym komutator dwóch pochodnych kowariantnych w działaniu na dowolne pole ϕ:

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu]\phi &= (\partial_\mu + ig\hat{A}_\mu)(\partial_\nu + ig\hat{A}_\nu)\phi - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \{\underline{\partial_\mu\partial_\nu} + ig(\partial_\mu\hat{A}_\nu + \underline{\hat{A}_\nu\partial_\mu + \hat{A}_\mu\partial_\nu} + ig\hat{A}_\mu\hat{A}_\nu)\}\phi - \{\mu \leftrightarrow \nu\} \\ &= ig(\partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu + ig[\hat{A}_\mu\hat{A}_\nu])\phi. \end{aligned} \tag{11.41}$$

Podkreślone, symetryczne człony uległy skasowaniu podczas antysymetryzacji. Dla przypadku abelowego, gdy komutator dwóch potencjałów znika, otrzymujemy tensor natężenia $F_{\mu\nu}$. Dlatego możemy zdefiniować jego nieabelowe uogólnienie w postaci

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu + ig[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]. \tag{11.42}$$

Tensor ten można rozłożyć na składowe kolorowe w bazie generatorów grupy cechowania. Podstawiając rozkład (11.36) dla potencjałów otrzymujemy

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\hat{T}^a = (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g\,\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)\hat{T}^a. \tag{11.43}$$

Stąd relacja między składowymi natężeń i potencjałów pól kolorowych

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g\,\epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu. \tag{11.44}$$

Zwróćmy uwagę na nieliniowe człony jakie pojawiają sie po prawej stronie powyższej relacji. Jak zobaczymy, są one odpowiedzialne za samoodziaływanie pól Yanga–Millsa.

Ćwiczenie 56
Wyprowadzić wzór (11.43).

Jak transformują sie nieabelowe natężenia pod wpływem transformacji cechowania potencjałów (11.8)? Korzystając z reguły transformacyjnej dla pochodnej kowariantnej (11.9), znajdziemy

$$\begin{aligned} ig\hat{F}'_{\mu\nu} &= [D'_\mu, D'_\nu] = (UD_\mu U^{-1})(UD_\nu U^{-1}) - (UD_\nu U^{-1})(UD_\mu U^{-1}) \\ &= U(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)U^{-1} = U(ig\hat{F}_{\mu\nu})U^{-1}. \end{aligned}$$

Stąd jednorodna reguła transformacyjna dla natężeń nieabelowych pól cechownia:

$$\hat{F}'_{\mu\nu} = U\,\hat{F}_{\mu\nu}\,U^{-1}. \tag{11.45}$$

W przypadku abelowym możemy przestawić wielkości po prawej stronie otrzymując niezmienniczość cechowania dla pola elektromagnetycznego:

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\,. \tag{11.46}$$

Łatwo już skonstruować niezmienniczy względem cechowania lagranżjan pola Yanga–Millsa

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}) = -\tfrac{1}{4}\,F^a_{\mu\nu}\,F^{a\mu\nu}\,, \tag{11.47}$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystaliśmy własność (10.10) generatorów grupy cechowania.

Ćwiczenie 57

Udowodnić niezmienniczość lagranżjanu (11.47) względem transformacji cechowania.

Podstawiając związek (11.44) do lagranżjanu (11.47) możemy go zapisać w formie $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, gdzie część swobodna to

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})\,, \tag{11.48}$$

natomiast część opisująca samoodziaływanie pól cechowania ma postać

$$\mathcal{L}_I = \frac{g}{2}\,\epsilon^{abc}\,(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)\,A^{b\mu}A^{c\nu} - \frac{g^2}{4}\,\epsilon^{abc}\epsilon^{ade}\,A^b_\mu\,A^c_\nu\,A^{d\mu}A^{e\nu}\,. \tag{11.49}$$

Zauważmy, że lagranżjan oddziaływania zawiera czlony trójliniowe w polach A_μ, proporcjonalne do stałej sprzężenia g, a także człony czteroliniowe proporcjonalne do g^2. Po skwantowaniu pola kolorowego, otrzymamy w ten sposób punktowe oddziaływanie trzech lub czterech kwantów pola (bozonów pośredniczących).

Ćwiczenie 58

Wyprowadzić lagranżjany (11.48) i (11.49).

Lagranżjan (11.47) prowadzi do nieliniowych równań Eulera–Largrange'a dla swobodnego pola Yanga–Millsa,

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} - g\,\epsilon^{abc}A^b_\mu\,F^{c\mu\nu} = 0\,. \tag{11.50}$$

Równania te mózna zapisać w bardziej zwartej formie w następujący sposób

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} + ig\,[\hat{A}_\mu\,, \hat{F}^{\mu\nu}] = 0\,. \tag{11.51}$$

Podstawiając związek (11.44) do równania (11.50) i wybierając cechowanie Lorentza $\partial_\mu A^{a\mu} = 0$, otrzymamy

$$\Box\, A^a_\nu = g\,\epsilon^{abc}A^{b\mu}\left(F^c_{\mu\nu} + \partial_\mu A^c_\nu\right)\,. \tag{11.52}$$

Tak więc pola Yanga–Millsa wynikające z lagranżjanu (11.47) są polami bezmasowymi, $m = 0$.

Ćwiczenie 59
Wyprowadzić równania ruchu (11.50), a następnie udowodnić, że można je zapisać w formie (11.51).

11.5 Podsumowanie

Podsumowującac, pełny lagranżjan oddziaływania, niezmienniczy względem transformacji cechowania, to:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + i\overline{\psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + igA^a_\mu \hat{T}^a\right)\psi - m\overline{\psi}\psi \,. \tag{11.53}$$

Zauważmy, że ze względu na niezmienniczość cechownia, pola Yanga–Millsa oddziaływuja z tą samą stała sprzężenia g zarówno z polami Diraca jak i między sobą.

Jako podsumowanie umieszczamy też tabelkę charakteryzującą lokalne transformacje cechowania

$$\phi'(x) = U(x)\,\phi(x)$$

Transformacja	abelowa $U(1)$	nieabelowa $SU(N)$
$U(x) =$	$\exp\{-ie\lambda(x)\}$	$\exp\{-ig\omega^a(x)\hat{T}^a\}$
pola cechowania	A_μ	$\hat{A}_\mu = A_\mu^a \hat{T}^a$
pochodna kowariantna	$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$	$D_\mu = \partial_\mu + ig\hat{A}_\mu$
cechowanie pól	$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$	$\hat{A}'_\mu = U\hat{A}_\mu U^{-1} - (1/ig)(\partial_\mu U)U^{-1}$
natężenia pól	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$	$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + ig[\hat{A}_\mu \hat{A}_\nu]$
cechowanie natężeń	$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$	$\hat{F}'_{\mu\nu} = U\hat{F}_{\mu\nu}U^{-1}$
lagranżjan	$\mathcal{L} = -(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	$\mathcal{L} = -(1/2)\,\mathrm{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu})$
równania pola	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$	$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} + ig[\hat{A}_\mu, \hat{F}^{\mu\nu}] = 0$

Tablica 11.1: Podstawowe relacje dla lokalnych transformacji cechowania.

Rozdział 12

Oddziaływania elektrosłabe

12.1 Pola chiralne a masy fermionów

Oddziaływania słabe łamią parzystość P (rozdział 5.6) dlatego podstawowymi polami materii fermionowej są pola chiralne, na przykład dla elektronu $\psi_e \equiv e$

$$e_L = P_L e = \frac{1-\gamma_5}{2}\, e\,, \qquad e_R = P_R e = \frac{1+\gamma_5}{2}\, e\,. \tag{12.1}$$

W oddziaływaniach słabych pola lewe oddziaływują inaczej niż pola prawe. Odtąd utożsamiliśmy chiralność ze skrętnościa, $(+) = R$ oraz $(-) = L$, pomimo tego że są one słuszne tylko dla pól bezmasowych.

Zapiszmy lagranżjan swobodnego pola Diraca (9.35) przy pomocy pól chiralnych korzystając ze związku $e = e_L + e_R$,

$$\mathcal{L}_D = i\,(\overline{e_L} + \overline{e_R})\,\gamma^\mu\,\partial_\mu(e_L + e_R)\, -\, m\,(\overline{e_L} + \overline{e_R})(e_L + e_R)\,. \tag{12.2}$$

Człony mieszane w części kinetycznej znikają, gdyż na przykład

$$\overline{e_L}\,\gamma^\mu\,\partial_\mu e_R = e^\dagger\,(P_L\,\gamma^0\,\gamma^\mu\,P_R)\,\partial_\mu e = e^\dagger\,(\gamma^0\,\gamma^\mu\,P_L\,P_R)\,\partial_\mu e = 0\,.$$

W powyższym rachunku wykorzystaliśmy własność antykomutacji macierzy γ^μ z macierzą γ_5 co prowadzi do warunku

$$\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu\,, \qquad \gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu \tag{12.3}$$

oraz ortogonalność operatorów rzutowych: $P_L P_R = 0$. Podobnie można udowodnić, że w części masowej lagranżjanu znikają wyrażenia diagonalne, na przykład

$$\overline{e_R}\, e_R = e^\dagger (P_R\,\gamma^0\,P_R)\, e = e^\dagger (\gamma^0\,P_L\,P_R)\, e = 0\,.$$

Ostatecznie więc otrzymujemy po wprowadzeniu oznaczenia $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$

$$\mathcal{L}_D = i\,\overline{e_L}\,\partial\!\!\!/\, e_L \,+\, i\,\overline{e_R}\,\partial\!\!\!/\, e_R \,-\, m\,(\overline{e_R}\, e_L + \overline{e_L}\, e_R)\,. \tag{12.4}$$

Jak widzimy człon masowy sprzęga pola o różnych chiralnościach. Sprzężenie to utrudnia analizę oddziaływań słabych, dlatego w pierwszym przybliżeniu założymy, iż rozważane pola są bezmasowe. Tak więc pola prawe i lewe nie komunikują się ze sobą. Po skonstruowaniu lagranżjanu oddziaływań elektrosłabych powrócimy do problemu generacji masy materii fermionowej poprzez sprzężenie ze skalarnym polem Higgsa, tak by zachowane były symetrie cechowania lagranżjanu bezmasowego.

12.2 Pola materii i transformacje cechowania

W teorii Weinberga–Salama–Glashowa lewoskrętne pola fermionowe leptonów i kwarków tworzą dublety, a prawoskrętne pola tworzą singlety względem lokalnej grupy cechowania $SU(2)_L$. Tak więc dla pierwszej generacji leptonów mamy:

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \qquad\qquad e_R\,, \tag{12.5}$$

gdzie ν_{eL}, e_L, e_R to chiralne pola Diraca neutrina i elektronu, zależne od punktu czasoprzestrzeni x. Podobnie dla pierwszej generacji kwarków

$$L_q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \qquad\qquad u_R\,,\ d_R\,. \tag{12.6}$$

W zgodzie z obserwacjami, w standardowym sformułowaniu nie występuje prawoskrętne neutrino.

Lokalna nieabelowa transformacja cechowania $SU(2)_L$ działa na **lewoskrętne** dublety leptonowe i kwarkowe w identyczny sposób:

$$L'_{e,q}(x) \;=\; \mathrm{e}^{-ig\omega^a(x)\hat{T}^a}\, L_{e,q}(x)\,,\,. \tag{12.7}$$

Macierze $\hat{T}^a$ to generatory grupy $SU(2)$ zadane przez macierze Pauliego

$$\hat{T}^a = \tfrac{1}{2}\,\sigma^a\,. \tag{12.8}$$

Prawoskrętne pola są singletami względem transformacji $SU(2)$, tzn. zachodzi:

$$\hat{T}^a \psi_R = 0\,. \tag{12.9}$$

Dodatkowo dla **prawych i lewych** pól fermionowych określona jest abelowa transformacja cechowania $U(1)_Y$, generowaną przez hiperładunek Y_i

$$\psi'_{R,Li}(x) = \mathrm{e}^{-ig'\omega(x)Y_i/2}\,\psi_{R,Li}(x)\,. \tag{12.10}$$

Spełnia on relację Gell-Manna - Okubo

$$T^3_i + \tfrac{1}{2}Y_i = Q_i\,, \tag{12.11}$$

gdzie Q_i jest wielokrotnością elementarnego ładunku elektrycznego $e > 0$ dla danego pola, a T^3_i jest trzecią składową słabego izospinu:

$$\hat{T}^3\,\psi_{iL} = T^3_i\,\psi_{iL}\,. \tag{12.12}$$

Pole	T_i^3	$Y_i/2$	Q_i
ν_{eL}	$+1/2$	$-1/2$	0
e_L	$-1/2$	$-1/2$	-1
e_R	0	-1	-1
u_L	$+1/2$	$1/6$	2/3
d_L	$-1/2$	$1/6$	-1/3
u_R	0	$2/3$	2/3
d_R	0	$-1/3$	-1/3

Tablica 12.1: Wartości trzeciej składowej izospinu, hiperładunku i ładunku elektrycznego dla cząstek elementarnych pierwszej rodziny.

Niezmienniczość cechowania względem transformacji $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ prowadzi do następującego lagranżjanu dla leptonów

$$\mathcal{L}_e = i\,\overline{L_e}\,\not{D}^L\,L_e + i\,\overline{e_R}\,\not{D}^R\,e_R \tag{12.13}$$

oraz podobnie dla kwarków

$$\mathcal{L}_q = i\,\overline{L_q}\,\not{D}^L\,L_q + i\,\overline{u_R}\,\not{D}^R\,u_R + i\,\overline{d_R}\,\not{D}^R\,d_R\,. \tag{12.14}$$

Pochodne kowariantne, $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$, są skonstruowane zgodnie z zasadą minimalnego sprzężenia. Grupa $SU(2)_L$ wnosi *trzy* pola cechowania W^a_μ, natomiast grupa $U(1)_Y$ wprowadza jedno pole cechowania B_μ, każde ze swoimi stałymi sprzężenia, g i g', odpowiednio. Tak więc dla pól lewoskrętnych

$$D^L_\mu = \partial_\mu + ig\,W^a_\mu\,\hat{T}^a + ig' B_\mu\,\hat{Y}\,, \tag{12.15}$$

gdzie macierz hiperładunku $\hat{Y}$

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} Y_1/2 & 0 \\ 0 & Y_2/2 \end{pmatrix}. \tag{12.16}$$

Definiując w podobny sposób diagonalną macierz ładunków elektrycznych $\hat{Q}$, zapisujemy relację (12.11) w postaci macierzowej

$$\hat{T}^3 + \hat{Y} = \hat{Q}\,. \tag{12.17}$$

Podobnie definiujemy pochodna kowariantna dla pól prawoskrętnych

$$D^R_\mu = \partial_\mu + ig' B_\mu\,Q_i\,. \tag{12.18}$$

Lagranżjany (12.13) i (12.14) można zapisać w formie $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, gdzie lagranżjan oddziaływania $\mathcal{L}_I$ w sektorze leptonowym to

$$\mathcal{L}_{Ie} = -\,\overline{L_e}\,\gamma^\mu\Big(g\,W^a_\mu\,\hat{T}^a + g' B_\mu \hat{Y}\Big)\,L_e - g'\,(Q_e\,\overline{e_R}\,\gamma^\mu e_R)\,B_\mu\,, \tag{12.19}$$

natomiast w sektorze kwarkowym otrzymujemy

$$\mathcal{L}_{Iq} = -\,\overline{L_q}\,\gamma^\mu\Big(g\,W^a_\mu\,\hat{T}^a + g' B_\mu \hat{Y}\Big)\,L_q - g'\,\Big(Q_d\,\overline{d_R}\,\gamma^\mu d_R + Q_u\,\overline{u_R}\,\gamma^\mu u_R\Big)\,B_\mu \tag{12.20}$$

12.3 Prądy naładowane

Zapiszmy macierz z polami cechowania w lagranżjanie oddziaływania jako sumę części diagonalnej i pozadiagonalnej

$$g\,W_\mu^a\,\hat{T}^a + g'\,B_\mu \hat{Y} = g\left(W_\mu^1\,\hat{T}^1 + W_\mu^2\,\hat{T}^2\right) + \left(g\,W_\mu^3\,\hat{T}^3 + g'\,B_\mu \hat{Y}\right) \tag{12.21}$$

Rozważmy składową pozadiagonalną zadaną przez wyraz w pierwszym nawiasie. Wprowadzając nowe pola

$$W_\mu^{\pm} = \frac{W_\mu^1 \pm i W_\mu^2}{\sqrt{2}} \tag{12.22}$$

oraz wykorzystując jawną postać generatorów grupy $SU(2)$,

$$\hat{T}^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{T}^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{12.23}$$

otrzymujemy

$$W_\mu^1\,\hat{T}^1 + W_\mu^2\,\hat{T}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & W_\mu^- \\ W_\mu^+ & 0 \end{pmatrix} = W_\mu^-\,\hat{T}^+ + W_\mu^+\,\hat{T}^-\,, \tag{12.24}$$

gdzie nowe generatory to

$$\hat{T}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{T}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.25}$$

Możemy teraz łatwo zapisać lagranżjan oddziaływania dla prądów naładowanych w formie macierzowej

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Ie}^{(cc)} &= -g\,\overline{L_e}\,\gamma^\mu\left(W_\mu^1\,\hat{T}^1 + W_\mu^2\,\hat{T}^2\right) L_e \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\ \overline{\nu_{eL}}\,,\overline{e_L}\ \right)\gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^- \\ W_\mu^+ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wykonując mnożenia macierzowe otrzymujemy ostateczną postać lagranżjanu dal prądów naładowanych

$$\mathcal{L}_{Ie}^{(cc)} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{\nu_{eL}}\,\gamma^\mu\,e_L\right) W_\mu^- - \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{e_L}\,\gamma^\mu\,\nu_{eL}\right) W_\mu^+\,. \tag{12.26}$$

Zwróćmy uwagę na to, że w procesach z prądami naładowanymi uczestniczą tylko lewoskrętne fermiony, **łamiąc maksymalnie parzystość** P.

Postępując analogicznie z lagranżjanem kwarkowym (12.20), znajdziemy

$$\mathcal{L}_{Iq}^{(cc)} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{u_L}\,\gamma^\mu\,d_L\right) W_\mu^- - \frac{g}{\sqrt{2}}\left(\overline{d_L}\,\gamma^\mu\,u_L\right) W_\mu^+\,. \tag{12.27}$$

Zwrócmy tym razem uwagę na te same stałe sprzężenia jak dla procesów leptonowych, co wyraża **uniwersalny charakter** oddziaływań z prądami naładowanymi. Do zagadnienia uniwersalności prądów naładowanych wrócimy w rozdziale poświęconym mieszaniu kwarków.

12.4 Prądy neutralne

Rozważmy diagonalną część lagranżjanu oddziaływania (12.19) związaną z prądami neutralnymi, które nie zmieniają ładunku elektrycznego

$$\mathcal{L}_{Ie}^{(nc)} = -\overline{L_e}\,\gamma^\mu\Big(g\,W_\mu^3\,\hat{T}^3 + g'\,B_\mu\hat{Y}\Big)\,L_e - (g'\,Q_e\,B_\mu)\,\overline{e_R}\,\gamma^\mu e_R\,. \tag{12.28}$$

Chcemy zidentyfikować oddziaływania elektromagnetyczne **mieszając** bozonowe pola cechowania przy pomocy liniowej transformacji unitarnej (dwuwymiarowego obrotu)

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \tag{12.29}$$

Pozostający do wyznaczenia parametr θ_W nazywany jest **kątem mieszania Weinberga**.

Podstawiając te relacje do macierzy w pierwszym nawiasie w lagranżjanie (12.28), otrzymujemy

$$\begin{aligned} & gW_\mu^3\,\hat{T}^3 + g'\,B_\mu\,\hat{Y} = \\ = \;& g\,(\cos\theta_W\,Z_\mu + \sin\theta_W\,A_\mu)\,\hat{T}^3 \,+\, g'\,(-\sin\theta_W\,Z_\mu + \cos\theta_W\,A_\mu)\,\hat{Y} \\ = \;& \Big(g\cos\theta_W\hat{T}^3 - g'\sin\theta_W\hat{Y}\Big)\,Z_\mu + \Big(g\sin\theta_W\hat{T}^3 + g'\cos\theta_W\hat{Y}\Big)\,A_\mu\,. \end{aligned}$$

Załóżmy następujące relacje między kątem Weinberga a stałymi sprzężenia,

$$g\,\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = e\,, \tag{12.30}$$

gdzie $e > 0$ jest elementarnym ładunkiem elektrycznym. Wykorzystując następnie związek $\hat{T}^3 + \hat{Y} = \hat{Q}$, otrzymujemy

$$gW_\mu^3\,\hat{T}^3 + g'\,B_\mu\,\hat{Y} \;=\; \frac{g}{\cos\theta_W}\,\Big(\hat{T}^3 - \hat{Q}\,\sin^2\theta_W\Big)\,Z_\mu + e\,\hat{Q}\,A_\mu\,. \tag{12.31}$$

Podstawiając natomiast nowe pola w drugim wyrażeniu w nawiasie w lagranżjanie (12.28), dostaniemy

$$\begin{aligned} g'\,B_\mu\,Q_e \;&=\; g'\,(-\sin\theta_W\,Z_\mu + \cos\theta_W\,A_\mu)\,Q_e \\ &=\; \frac{g}{\cos\theta_W}\,\Big(-\sin^2\theta_W\,Q_e\Big)\,Z_\mu + e\,Q_e\,A_\mu\,. \end{aligned} \tag{12.32}$$

Ostatecznie, po wprowadzeniu nowych pól, lagranżjan (12.28) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Ie}^{(nc)} \;=\; & -\frac{g}{\cos\theta_W}\,\overline{L_e}\,\gamma^\mu\Big(\hat{T}^3 - \hat{Q}\sin^2\theta_W\Big)\,L_e\,Z_\mu - e\,\Big(\overline{L_e}\,\gamma^\mu\,\hat{Q}\,L_e\Big)\,A_\mu \\ & -\frac{g}{\cos\theta_W}\,\overline{e_R}\,\gamma^\mu\,\Big(-Q_e\sin^2\theta_W\Big)\,e_R\,Z_\mu - e\,Q_e\,(\overline{e_R}\,\gamma^\mu e_R)\,A_\mu\,. \end{aligned} \tag{12.33}$$

Ćwiczenie 60
Sprawdzić wzory (12.30)–(12.32).

Zauważmy, że dla dubletu leptonowego macierz ładunku elektrycznego $\hat{Q}$ ma postać

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} Q_{\nu_e} & 0 \\ 0 & Q_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{12.34}$$

Stąd w części elektromagnetycznej ze sprzężeniem do pola A_μ dostaniemy brak takich oddziaływań dla obojętnych elektrycznie neutrin oraz standardowy lagranżjan oddziaływania elektromagnetycznego dla leptonów naładowanych

$$\mathcal{L}_{Ie}^{(A)} = -e\,Q_e\,(\overline{e_L}\,\gamma^\mu e_L + \overline{e_R}\,\gamma^\mu e_R)\,A_\mu = -e\,Q_e\,(\overline{e}\,\gamma^\mu e)\,A_\mu\,. \tag{12.35}$$

W oczywisty sposób oddziaływania elektromagnetyczne nie rozróżniają skrętności, tym samym nie łamią parzystości P. Postępując podobnie w sektorze kwarkowym, otrzymujemy dla części elektromagnetycznej lagranżjan

$$\mathcal{L}_{Iq}^{(A)} = -e\left(Q_u\,\overline{u}\,\gamma^\mu u + Q_d\,\overline{d}\,\gamma^\mu d\right)A_\mu\,. \tag{12.36}$$

Dla części lagranżjanu ze sprzężeniem do neutralnego elektrycznie pola Z_μ, otrzymujemy

$$\mathcal{L}_{Ie,q}^{(Z)} = -\frac{g}{\cos\theta_W}\,\overline{\psi_i}\,\gamma^\mu\left(T_i^3 - Q_i\sin^2\theta_W\right)\psi_i\,Z_\mu \tag{12.37}$$

gdzie ψ_i jest dowolnym polem chiralnym, leptonowym, ν_L, e_L, e_R, lub kwarkowym, u_L, u_R, d_L, d_R. Zauważmy, że **prądy neutralne łamią parzystość P** ze względu na inne wartości trzeciej składowej izospinu, $T_i^3 = \pm 1/2$ dla cząstek lewych i $T_i^3 = 0$ dla cząstek prawych.

Oczywistym jest, że w przeciwieństwie do prądów naładowanych, prądy neutralne nie zmieniają zapachu zarówno kwarków jak i leptonów.

Ćwiczenie 61
Pokazać, że lagranżjan oddziaływania dla prądów neutralnych można zapisać przy pomocy bispinorów Diraca, $\psi = \psi_R + \psi_L$, w postaci

$$\mathcal{L}_{Ie,q}^{(Z)} = -\frac{g}{2\cos\theta_W}\sum_f \overline{\psi}_f\,\gamma^\mu\,(V_f - A_f\gamma_5)\,\psi_f\,Z_\mu\,, \tag{12.38}$$

gdzie

$$V_f = T_f^3 - Q_f\sin^2\theta_W\,, \qquad\qquad A_f = T_f^3\,, \tag{12.39}$$

natomiast f rozróżnia leptony i kwarki.

12.4.1 Relacje dla kąta Weinberga

Z warunku (12.30) wynika, że kąt Weinberga jest zadany przez stosunek stałych sprzężenia

$$\mathrm{tg}\,\theta_W = \frac{g'}{g}, \tag{12.40}$$

z którego można wyliczyć

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}} \qquad \sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \tag{12.41}$$

by otrzymać relację

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}. \tag{12.42}$$

Eksperymentalna wartość kąta Weinberga jest określona przez $\sin^2\theta_W = 0.22$.

12.5 Podsumowanie

Lagranżjan oddziaływania dla pól elektrosłabych ma strukturę

$$\mathcal{L}_I = -\sum_{i,j} \mathcal{G}_{ij}\,(\overline{\psi_i}\,\gamma^\mu\,\psi_j)\,\mathcal{W}_\mu \tag{12.43}$$

z podanymi w tabelce poniżej polami cechowania i stałymi sprzężenia. Pola ψ_i są polami chiralnymi, z których tworzymy istniejące w teorii prądy: **lewe dla prądów naładowanych** oraz **prawe i lewe dla prądów neutralnych**.

Prądy	$\mathcal{W}_\mu$	$\mathcal{G}_{ij}$
naładowane $(i \neq j)$	$W^\pm_\mu$	$\frac{g}{\sqrt{2}}$
neutralny $(i = j)$	Z_μ	$\frac{g}{\cos\theta_W}\,(T^3_i - Q_i\sin^2\theta_W)$
elektromagnetyczny $(i = j)$	A_μ	$e\,Q_i$

Tablica 12.2: Prądy i sprzężenia w modelu Weinberga-Salama.

Poniższa tabelka podsumowuje liczby kwantowe pól chiralnych. Wpisaliśmy w nią hipotetyczne neutrino prawoskrętne, które w modelu Weinberga-Salama jest cząstką nieoddziaływującą z polami cechowania (neutrino sterylne).

Pola chiralne ψ_i	T_i^3	Q_i	Uwagi
ν_L	1/2	0	
N_R	0	0	Neutrino sterylne
e_L	-1/2	-1	
e_R	0	-1	Singlet
u_L	1/2	2/3	
u_R	0	2/3	Singlet
d_L	-1/2	-1/3	
d_R	0	-1/3	Singlet

Tablica 12.3: Pola chiralne w teorii elektrosłabej (pierwsza generacja).

Rozdział 13

Mechanizm Higgsa

Skończonu zasięg oddziaływań słabych sugeruje, że ich bozony pośredniczące mają masę. Jednym ze sposobów nadania masy jest dodanie członu masowego, tak jak dla pola Proca (11.30), do lagranżjanu pól cechowania

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{3} W^a_{\mu\nu} W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}\,, \tag{13.1}$$

gdzie tensory natężeń pól cechowania to

$$W^a_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - g\,\epsilon^{abc} W^b_\mu W^c_\nu \tag{13.2}$$

$$B_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\,. \tag{13.3}$$

Nie jest to jednak dobra metoda, gdyż w przypadku pól nieabelowych otrzymujemy nierenormalizowalną teorię kwantową. Wyjściem z problemu jest mechanizm zaproponowany przez Higgsa.

13.1 Spontaniczne łamanie lokalnej symetrii cechowania

Rozważmy dublet zespolonych skalarnych pól Higgsa

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \tag{13.4}$$

gdzie ϕ_i to cztery składowe rzeczywiste. Pole to sprzęga się z polami cechowania W^a_μ i B_μ, ze wględu na lokalną symetrią cechowania $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \mathrm{e}^{-ig\omega^a(x)\hat{T}^a}\,\phi(x) \\ \phi'(x) &= \mathrm{e}^{-ig'\omega(x)\hat{Y}_H}\,\phi(x)\,, \end{aligned} \tag{13.5}$$

gdzie $\hat{Y}_H$ jest diagonalna macierzą hiperładunku pól Higgsa postaci (12.16). Podobnie jak dla pól fermionowych spełniona jest relacja

$$\hat{T}^3 + \hat{Y}_H = \hat{Q} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.6}$$

Pole	T_i^3	$Y_i/2$	Q_i
ϕ^+	$+1/2$	$1/2$	1
ϕ^0	$-1/2$	$1/2$	0

Tablica 13.1: Wartości trzeciej składowej izospinu, hiperładunku i ładunku elektrycznego dla pól Higgsa.

Tak więc zakładamy, że składowa ϕ^+ niesie dodatni ładunek elektryczny e, natomiast składowa ϕ^0 jest neutralna. Stąd macierz hiperładunku

$$\hat{Y}_H = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} . \tag{13.7}$$

Wartości trzeciej składowej izospinu, hiperładunku i ładunku elektrycznego dla pól Higgsa podsumowujemy w tabelce 13.1.

Niezmienniczy względem transformacji lagranżjan pól Higgsa (13.5) przyjmuje następującą postać

$$\mathcal{L}_H = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) , \tag{13.8}$$

gdzie pochodna kowariantna to

$$D_\mu = \partial_\mu + ig W_\mu^a \hat{T}^a + ig' B_\mu \hat{Y}_H . \tag{13.9}$$

Potencjał oddziaływania jest zadany przez

$$V(\phi^\dagger \phi) = \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \mu^2 \phi^\dagger \phi , \qquad \lambda > 0 . \tag{13.10}$$

Zwróćmy uwagę na "zły" znak w czynniku kwadratowym w polach, który nie pozwala na interpretację μ^2 jako masy pola Higgsa.

Stan podstawowy (próżnia) pola Higgsa odpowiada minimum potencjału V, określonego przez znikanie pierwszej pochodnej

$$V'(\phi^\dagger \phi) = 2\lambda \phi^\dagger \phi - \mu^2 = 0 . \tag{13.11}$$

Innymi słowy minimum jest określone przez warunek

$$\phi^\dagger \phi = \frac{\mu^2}{2\lambda} , \tag{13.12}$$

który definiuje zbiór konfiguracji niezmienniczy względem grupy cechowania $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Spontaniczne łamanie symetrii cechowania polega na wyborze konkretnej konfiguracji ϕ_0 spełniającej powyższe równanie. Standardowym wyborem jest

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} , \qquad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} . \tag{13.13}$$

W rozdziale 14.1 pokażemy, że parametr łamania symetrii $v = 247$ GeV. W ten sposób symetria cechowania zostaje złamana, gdyż stan ϕ_0 nie jest niezmienniczy względem pełnej grupy symetrii cechowania. Pozostaje on jednak symetryczny ze względu na transformacje cechowania $U(1)_Q$, generowane przez operator ładunku elektrycznego

$$\hat{Q} = \hat{T}^3 + \hat{Y}_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13.14}$$

gdyż

$$\hat{Q}\phi_0 = 0 \qquad => \qquad \mathrm{e}^{-i\lambda(x)\hat{Q}}\,\phi_0 = \phi_0\,. \tag{13.15}$$

Warunek ten wyraża **neutralność elektryczną stanu próżni**.

Podsumowując, wybór konfiguracji (13.13) łamie spontanicznie wyjściową symetrię cechowania do grupy cechowania oddziaływań elektromagnetycznych,

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \;\to\; U(1)_Q\,, \tag{13.16}$$

przy skali zadanej przez wartość v. Teoria ze spontaniczym łamaniem symetrii jest po skwantowniu renormalizowalna. Dowód tego faktu został przedstawiony przez 't Hoofta i Veltmana za co zostali uhonorowani nagrodą Nobla w 1999 roku.

13.2 Masa bozonów pośredniczących

Rozważmy fluktuację pola $\phi'(x)$ wokól konfiguracji próżniowej ϕ_0

$$\phi(x) = \phi'(x) + \phi_0\,. \tag{13.17}$$

Pole $\phi'(x)$ uzyskuje status nowego dynamicznego pola, przy pomocy którego zapiszemy larganżjan Higgsa. Podstawiając (13.17) do lagranżjanu (13.8) znajdziemy między innymi człon

$$\mathcal{L}_M = \left[(g\,W^{a\mu}\,\hat{T}^a + g'\,B^\mu\,\hat{Y}_H)\,\phi_0\right]^\dagger \left[(g\,W^a_\mu\,\hat{T}^a + g'\,B_\mu\hat{Y}_H)\,\phi_0\right]. \tag{13.18}$$

Człon ten nadaje masę bozonom pośredniczącym w lagranżjanie będącym sumą larganżjanu pól cechowania (13.1) i lagranżjanu pól Higgsa (13.8):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H = (\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M) + (\mathcal{L}_H - \mathcal{L}_M). \tag{13.19}$$

Policzmy, po wykonaniu podstawienia nowych pól cechowania (12.29) i wykorzystaniu relacji (12.31)

$$(g\,W^a_\mu\,\hat{T}^a + g'\,B_\mu\hat{Y})\,\phi_0 =$$

$$= \left(g\,W^-_\mu\,\hat{T}^+ + g\,W^+_\mu\,\hat{T}^- + \frac{g}{\cos\theta_W}\left(\hat{T}^3 - \hat{Q}\sin^2\theta_W\right)Z_\mu + e\,\hat{Q}A_\mu\right)\phi_0$$

Wykorzystując następnie własności stanu próżni

$$\hat{Q}\phi_0 = 0\,, \qquad \hat{T}^-\phi_0 = 0\,, \qquad \hat{T}^3\phi_0 = -\tfrac{1}{2}\,\phi_0\,, \tag{13.20}$$

otrzymujemy

$$(g\,W^a_\mu \hat{T}^a + g'\,B_\mu \hat{Y})\,\phi_0 = \left(gW^-_\mu\,\hat{T}^+ - \frac{g}{2\cos\theta_W} Z_\mu\right)\phi_0\,. \tag{13.21}$$

Zwróćmy uwagę, że człon z polem A_μ znika ze względu na neutralność elektryczną stanu próżni.

Podstawiając relację (13.21) do lagranżjanu (13.18), znajdujemy

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M &= \phi_0^\dagger\left(gW^{+\mu}\hat{T}^- - \frac{g}{2\cos\theta_W}Z^\mu\right)\left(gW^-_\mu\,\hat{T}^+ - \frac{g}{2\cos\theta_W}Z_\mu\right)\phi_0 \\
&= g^2\,W^{+\mu}W^-_\mu\left(\phi_0^\dagger\,\hat{T}^-\hat{T}^+\phi_0\right) + \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}\,Z^\mu Z_\mu\left(\phi_0^\dagger\,\phi_0\right) \\
&- \frac{g^2}{2\cos\theta_W}\left\{W^{+\mu}Z_\mu\left(\phi_0^\dagger\,\hat{T}^-\phi_0\right) + W^{-\mu}Z_\mu\left(\phi_0^\dagger\,\hat{T}^+\phi_0\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{13.22}$$

Podstawiając postać (13.13) stanu próżni, znajdujemy

$$\phi_0^\dagger\,\phi_0 = \frac{v^2}{2}\,, \qquad \phi_0^\dagger\,\hat{T}^-\hat{T}^+\phi_0 = \frac{v^2}{2} \tag{13.23}$$

oraz dla wyrażeń w ostatniej linijce

$$\phi_0^\dagger\,\hat{T}^-\phi_0 = \phi_0^\dagger\,\hat{T}^+\phi_0 = 0\,. \tag{13.24}$$

Ostatecznie, lagranżjan $\mathcal{L}_M$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M &= \frac{g^2v^2}{4}\,W^{+\mu}\,W^-_\mu + \frac{g^2v^2}{8\cos^2\theta_W}\,Z^\mu\,Z_\mu + 0\cdot A^\mu A_\mu \\
&= m_W^2\,W^{+\mu}\,W^-_\mu + \tfrac{1}{2}m_Z^2\,Z^\mu Z_\mu\,.
\end{aligned} \tag{13.25}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób trzy masywne bozony $W^\pm$ i Z^0 z masą

$$m_W = \frac{gv}{2} \qquad m_Z = \frac{gv}{2\cos\theta_W} \tag{13.26}$$

oraz bezmasowe pole fotonowe A_μ. Bezmasowość fotonu jest wynikiem istnienia residualnej symetrii $U(1)_Q$ stanu próżni Higgsa, równanie (13.15), która odzwierciedla jej neutralność elektryczną. Ze wzorów (13.26) wynika, że kąt Weinberga wiąże masy bozonów pośredniczących

$$\frac{m_W}{m_Z} = \cos\theta_W\,, \tag{13.27}$$

co prowadzi do relacji $m_W < m_Z$. Eksperymentalna wartość mas bozonów pośredniczących to $m_W = 80.4$ GeV oraz $m_Z = 91.2$ GeV.

13.3 Lagranżjan Higgsa w cechowaniu unitarnym

Zadane przez cztery składowe rzeczywiste pole Higgsa (13.4) można sparametryzować także w inny sposób:

$$\phi(x) = U^{-1}(\xi(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ (v+H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{13.28}$$

gdzie dwuwymiarowa macierz

$$U^{-1}(\xi(x)) = \mathrm{e}^{i\xi^a(x)\hat{T}^a/v} \tag{13.29}$$

należy do grupy $SU(2)$, $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ jest skalą dla wartości próżniowej pola Higgsa, natomiast $H(x)$ jest *rzeczywistym* polem skalarnym. Tak więc, cztery niezależne składowe rzeczywiste tej parametryzacji to pola $(\xi(x), H(x))$.

Dowód istnienia takiej parametryzacji wynika z następującego rozumowania. Rozważmy dowolny dwuskladnikowy wektor o współczynnikach zespolonych

$$\phi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{13.30}$$

Działając na niego macierzą z grupy $SU(2)$:

$$U = \frac{1}{\sqrt{|a|^2+|b|^2}} \begin{pmatrix} b & -a \\ a^* & b^* \end{pmatrix}, \tag{13.31}$$

otrzymujemy

$$U\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{|a|^2+|b|^2} \end{pmatrix}. \tag{13.32}$$

Mnożąc obie strony przez macierz odwrotną otrzymujemy postać parametryzacji (13.28)

$$\phi = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{|a|^2+|b|^2} \end{pmatrix}, \qquad U^{-1} \in SU(2). \tag{13.33}$$

<u>Ćwiczenie 62</u>
Pokazać, że macierz (13.31) należy do grupy $SU(2)$, a następnie udowodnić związek (13.32).

Macierz (13.29) jest elementem lokalnej grupy cechowania $SU(2)$. Możemy więc skorzystać ze swobody cechowania lagranżjanu (13.19) i wykonać transformację cechowania z macierzą odwrotną

$$U(\xi(x)) = \mathrm{e}^{-i\xi^a(x)\hat{T}^a/v}. \tag{13.34}$$

Przecechowując pole Higgsa oraz pola bozonów pośredniczących,

$$\phi' \;=\; U\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+H \end{pmatrix} \tag{13.35}$$

$$\hat{W}'_\mu \;=\; U\hat{W}_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1}, \tag{13.36}$$

otrzymujemy lagranżjan (13.19) wyrażony przy pomocy nowych pól

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G(\hat{W}', B) + \mathcal{L}_H(\phi'). \tag{13.37}$$

Powyższa transformacja pól nazywa się *cechowaniem unitarnym*. Ujawnia ona fizyczny stopień swobody lagranżjanu Higgsa, rzeczywiste pole H, będące fluktuacją (13.17) wokół próżni ϕ_0. Pozostałe skladowe pola Higgsa, ξ, zostały zaabsorbowane przez nowe pola cechowania $\hat{W}'$. W przypadku globalnej symetrii cechowania pola ξ byłyby bezmasowymi *bozonami Goldstona* z rozdziału 10.3. Pojawiają się one w wyniku złamania symetrii próżni (13.13) przez transformacje $SU(2)$. Dla każdego generatora tej grupy zachodzi bowiem

$$\hat{T}^a\phi_0 \neq 0. \tag{13.38}$$

W teorii z lokalną symetrią cechowania bezmasowe bozony Goldstona zostały, mówiąc obrazowo, "zjedzone" przez trzy wektorowe bozony pośredniczące, które uzyskały w ten sposób masę. Masowe pola wektorowe mają dodatkowy stopień swobody związany z polaryzacją podłużną i ten właśnie stopnień swobody został dostarczony przez zaabsorbowane składowe pola Higgsa.

Lagranżjan Higgsa wyrażony w nowych polach ma następującą postać

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H \;&=\; \tfrac{1}{2}(\partial^\mu H)(\partial_\mu H) - V(v+H) \\ &=\; \frac{(v+H)^2}{2}\Big[(gW^a_\mu\hat{T}^a + g'B_\mu\hat{Y}_H)\,\xi_0\Big]^\dagger\Big[(gW^a_\mu\hat{T}^a + g'B_\mu\hat{Y}_H)\,\xi_0\Big], \end{aligned} \tag{13.39}$$

gdzie $\xi_0^T = (0,1)$ jest wektorem jednostkowym w kierunku wyróżnionym przez stan próżni.

Wyrażenie w pierwszej linijce $\mathcal{L}_{1(H)}$ opisuje pole Higgsa i jego samooddziaływanie. Obliczając bowiem potencjał Higgsa

$$V(\phi') = \frac{\lambda}{4}(H+v)^4 - \frac{\mu^2}{2}(H+v)^2, \tag{13.40}$$

dostajemy po odrzuceniu wyrazów niezależnych od pól H oraz wykorzystaniu relacji $v = \sqrt{\mu^2/\lambda}$:

$$\mathcal{L}_{1(H)} = \tfrac{1}{2}(\partial^\mu H)(\partial_\mu H) - \tfrac{1}{2}(2\mu^2)H^2 - \lambda v H^3 - \tfrac{1}{4}\lambda H^4. \tag{13.41}$$

Tak więc, z tej części lagranżjanu Higgsa wynikają następujące wnioski.

- Cząstki Higgsa mają masę

$$m_H = \sqrt{2}\mu = \sqrt{2\lambda}\, v. \tag{13.42}$$

- Cząstki Higgsa oddziaływują ze sobą *trój-* i *czterowierzchołkowo* ze stałymi sprzężenia, odpowiednio λv oraz $\lambda/4$. Wyznaczenie wartości tego sprzężenia będzie ważnym elementem badań eksperymentalnych po ewentualnym odkryciu cząstki Higgsa.

Wyrażenie w nawiasach kwadratowych w drugiej linijce (13.39) zostało już policzone w poprzednim rozdziale, równanie (13.25). Tak więc dla tej linijki otrzymujemy

$$\mathcal{L}_{2(H)} = \frac{(v+H)^2}{8}\left[2g^2\, W^{+\mu} W^-_\mu + (g^2+g'^2)\, Z^\mu Z_\mu\right]. \tag{13.43}$$

Rozwijając $(v+H)^2$ stwierdzamy, że część $\mathcal{L}_2$ lagranżjanu Higgsa zawiera:

- Człon nadający masę bozonom pośredniczącym

$$\mathcal{L}_{2(Hm)} = m_W^2\, W^{+\mu} W^-_\mu + \tfrac{1}{2} m_Z^2\, Z^\mu Z_\mu. \tag{13.44}$$

- Człony *trójwierzchołkowe* opisujące oddziaływania cząstki Higgsa z dwoma bozonami pośredniczącymi:

$$\mathcal{L}_{2(H3)} = g\, m_W\, H\, W^{+\mu} W^-_\mu + \frac{g\, m_Z}{2\cos\theta_W}\, H\, Z^\mu Z_\mu. \tag{13.45}$$

- Człony *czterowierzchołkowe* opisujące oddziaływania dwóch cząstek Higgsa z dwoma bozonami pośredniczącymi:

$$\mathcal{L}_{2(H4)} = \frac{g^2}{4} H^2\, W^{+\mu} W^-_\mu + \frac{g^2}{8\cos^2\theta_W}\, H^2\, Z^\mu Z_\mu. \tag{13.46}$$

Przypomnijmy, że całkowity lagranżjan Higgsa to

$$\mathcal{L}_H = \mathcal{L}_{1(H)} + \mathcal{L}_{2(Hm)} + \mathcal{L}_{2(H3)} + \mathcal{L}_{2(H4)}. \tag{13.47}$$

Ćwiczenie 63

Wyprowadzić wzory (13.39)–(13.42).

Rozdział 14

Fenomenologia oddziaływań elektrosłabych

14.1 Teoria Fermiego

Jest to fenomenologiczna teoria oddziaływań słabych, opisująca niskoenergetyczne oddziaływania z udziałem prądów naładowanych, na przykład rozpad miuonu lub neutronu

$$\mu \rightarrow \nu_\mu + e + \overline{\nu_e} \qquad\qquad n \rightarrow p + e + \overline{\nu_e}. \tag{14.1}$$

Procesy te ilustrują kilka ważnych aspektów oddziaływań słabych.

1. Podlegają im oprócz elektronu e i neutrina elekronowego ν_e, także inne leptony: miuon μ i towarzyszące mu neutrino miuonowe ν_μ.

2. W procesach z udziałem letptonów zachowana jest cząstkowa liczba leptonowa:

$$(e, \nu_e) \qquad \rightarrow \qquad l_e = \pm 1 \tag{14.2}$$

$$(\mu, \nu_\mu) \qquad \rightarrow \qquad l_\mu = \pm 1, \tag{14.3}$$

   gdzie znak $(+)$ dotyczy cząstek, natomiast $(-)$ antycząstek.

Ćwiczenie 64
Sprawdzić, że w procesach (14.1) są zachowane cząstkowe liczby leptonowe oraz całkowita liczba leptonowa $l = l_e + l_\mu$.

Obserwacje te prowadzo do pojęcia *generacji*. Do istniejącej struktury multipletu (12.5) dodajemy jej kopię miuonową

$$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \qquad\qquad \mu_R \tag{14.4}$$

z *identycznym* lagranżjanem oddziaływania jak dla generacji elektronowej. Więcej na temat generacji w rozdziale 14.5.

Fermi założył uniwersalny charakter oddziaływań słabych postulując następującą ogólną formę lagranżjanu oddziaływania

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, J^\mu J_\mu \,, \tag{14.5}$$

gdzie G_F jest fenomenologiczną stałą Fermiego o wymiarze GeV^{-2}. Występujący tu prąd jest sumą prądów leptonowego i hadronowego

$$J_\alpha = l_\alpha + h_\alpha \,, \tag{14.6}$$

o uniwersalnej strukturze $V - A$, porównaj (5.39),

$$l_\alpha \;=\; \overline{e}\,\gamma_\alpha\,(1-\gamma_5)\,\nu_e + \overline{\mu}\,\gamma_\alpha\,(1-\gamma_5)\,\nu_\mu + \ldots + \text{h.c.} \tag{14.7}$$

$$h_\alpha \;=\; \overline{p}\,\gamma_\alpha\,(1-\gamma_5)\,n + \ldots + \text{h.c.} \tag{14.8}$$

Przykładowo, dla rozpadu miuonu lagranżjan Fermiego ma następującą postać

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, [\overline{\nu_\mu}\,\gamma^\alpha\,(1-\gamma_5)\,\mu]\,[\overline{e}\,\gamma_\alpha\,(1-\gamma_5)\,\nu_e] \,. \tag{14.9}$$

Opisuje on czterofermionowe oddziaływanie punktowe. Z punktu widzenia kwantowej teorii pola, teoria Fermiego jest nierenormalizowalna ze względu na ujemny (w jednostkach masy) wymiar stałej sprzężenia G_F. Można ją jednak potraktować jako teorię efektywną, prowadzącą do dobrego opisu oddziaływań słabych w zakresie energii

$$E \ll 1/\sqrt{G_F} \,. \tag{14.10}$$

W takim przypadku amplituda procesu $i\mathcal{M}$ jest określona przez najniższy rząd rachunku zaburzeń względem stałej Fermiego. Na przykład, dla rozpadu miuonu otrzymujemy amplitudę

$$i\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\, [\overline{\nu_\mu}\,\gamma^\alpha\,(1-\gamma_5)\,\mu]\,[\overline{e}\,\gamma_\alpha\,(1-\gamma_5)\,\nu_e] \,. \tag{14.11}$$

Obliczając przy jej pomocy czas życia miuonu i porównując go z wartością mierzoną wyznaczymy wielkość stałej Fermiego

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5}\, m_p^{-2} \,, \tag{14.12}$$

gdzie m_p jest masą protonu.

Teorię Fermiego można potraktować jako niskoenergetyczne przybliżenie do teorii Weinberga–Salama. Dla dużych energii czterofermionowe oddziaływanie punktowe zostaje zastąpionowe poprzez oddziaływanie z wymianą bozonów pośredniczących. Jednak dla energii (14.10) można napisać amplitudę analogiczną do (14.11), wychodząc z lagranżjanu Weineberga–Salama (12.26) rozszerzonego o drugi dublet letonowy (14.4):

$$i\mathcal{M} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{M_W^2}\, [\overline{\nu_{\mu L}}\,\gamma^\alpha\,\mu_L]\,[\overline{e_L}\,\gamma_\alpha\,\nu_{eL}] \,, \tag{14.13}$$

gdzie czynnik $1/M_W^2$ to propagator bozonu W dla małych wartości kwadratu przekazu czteropędu $-p^2 \ll M_W^2$.

Występujące tu prądy mają strukturę $V - A$, gdyż dla dowolnych pól fermionowych zachodzi

$$\overline{\psi_L}\,\gamma^\alpha\,\chi_L = \psi^\dagger\,(P_L\,\gamma_0\,\gamma^\alpha\,P_L)\,\chi = \psi^\dagger\,(\gamma_0\,\gamma^\alpha\,P_L^2)\,\chi = \tfrac{1}{2}\,\overline{\psi}\,\gamma^\alpha\,(1-\gamma_5)\,\chi\,.$$

Wykorzystując powyższy związek w (14.13) otrzymamy amplitudę (14.11) pod warunkiem, że

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{1}{2v^2}\,, \tag{14.14}$$

gdzie w ostatniej równości użyliśmy pierwszą z relacji (13.26). Możemy więc znaleźć wartość stałej sprzężenia

$$g \approx 0.67 \tag{14.15}$$

oraz wartość próżniową pola Higgsa

$$v = (\sqrt{2}\,G_F)^{-1/2} \simeq 247 \text{ GeV}\,. \tag{14.16}$$

Jak pamiętamy, v jest jednocześnie skalą spontanicznego łamania symetrii (13.16) oddziaływań elektrosłabych.

Ćwiczenie 65

Obliczyć wartość g oraz v.

14.2 Masy naładowanych leptonów

Rozpocznijmy od masy elektronu. Nie może ona być generowana ze standardowego członu w lagranżjanie (porównaj (12.4))

$$\mathcal{L}_m = -m_e\,(\overline{e_R}\,e_L + \overline{e_L}\,e_R) = -m_e\,\overline{e}\,e\,, \tag{14.17}$$

gdyż pola e_L i e_R są składowymi, odpowiednio, dubletu i singletu grupy cechowania $SU(2)_L$. Tak więc lagranżjan ten nie ma symetrii oddziaływań elektrosłabych.

Możemy jednak skonstruować lagranżjan z tą symetrią, z którego otrzymamy człon postaci (14.17) po spontanicznym złamaniu symetrii przez pole Higgsa:

$$\mathcal{L}_m = -G_e\left(\overline{L_e}\,\phi\,e_R + \text{h.c.}\right), \tag{14.18}$$

gdzie G_e jest stałą sprzężenia Yukawy.

Ćwiczenie 66

Udowodnić niezmienniczość (14.18) względem transformacji $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

W cechowaniu unitarnym (13.35) otrzymujemy

$$\mathcal{L}_m = -\frac{G_e}{\sqrt{2}}(v+H)\,(\overline{e_R}\,e_L + \overline{e_L}\,e_R)\,. \tag{14.19}$$

Kładąc $H=0$ otrzymujemy człon masowy (14.17),

$$\mathcal{L}_m \quad\to\quad -\,m_e\,(\overline{e_R}\,e_L + \overline{e_L}\,e_R)\,, \tag{14.20}$$

z masą

$$m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}}\,. \tag{14.21}$$

Podstawiając wartość masy elektronu oraz wartości próżniowej $v \simeq 247$ GeV znajdziemy wielkość bezwymiarowej stałej sprzężenia

$$G_e \approx 3\cdot 10^{-6}\,. \tag{14.22}$$

W związku z tak małą wartością sprzężenia oddziaływanie między elektronem a cząstka Higgsa wynikające z lagranżjanu (14.19),

$$\mathcal{L}^I = -\frac{G_e}{\sqrt{2}}\,H\,\overline{e}\,e\,, \tag{14.23}$$

jest zaniedbywalnie małe. Zwróćmy jednak uwagę, że stała sprzężenia tego oddziaływania,

$$\frac{G_e}{\sqrt{2}} = \frac{m_e}{v} = \frac{g}{2}\,\frac{m_e}{M_W}\,, \tag{14.24}$$

rośnie z masą fermionu. Jak zobaczymy, dla dostatecznie dużej masy kwarków oddziaływanie to będzie niezaniedbywalne.

Wypiszmy na koniec pełny lagranżjan pola elektronowego oddziaływującego z polem Higgsa w cechowaniu unitarnym

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m = \overline{e}\left(i\partial\!\!\!/ - m_e - \frac{m_e}{v}\,H\right)e\,. \tag{14.25}$$

<u>Ćwiczenie 67</u>

Wyprowadzić relację (14.24) wychodząc z równości (14.21).

14.3 Masy kwarków

Podobnie można skonstruować masę dla kwarków (12.6). Dla kwarku d mamy analogiczny lagranżjan jak dla elektronu (14.18)

$$\mathcal{L}_m = -G_d\left(\overline{L_q}\,\phi\,d_R + \text{h.c.}\right). \tag{14.26}$$

W cechowaniu unitarnym otrzymujemy

$$-\mathcal{L}_m = \frac{G_d}{\sqrt{2}}(v+H)\left(\overline{d_R}\,d_L + \overline{d_L}\,d_R\right) \quad\to\quad m_d\left(\overline{d_R}\,d_L + \overline{d_L}\,d_R\right). \tag{14.27}$$

gdzie masa $m_d = G_d\, v/\sqrt{2}$.

Powstaje jednak problem dla kwarku górnego u, gdyż wyrażenie $\overline{L_q}\,\phi\, u_R$ *nie jest* niezmiennicze względem transformacji $U(1)_Y$. Ponadto po spontanicznym złamaniu symetrii otrzymalibyśmy człon mieszany $\overline{d_L} u_R$ zamiast $\overline{u_L} u_R$. Rozwiązaniem jest wprowadzenie dualnego pola Higgsa

$$\tilde{\phi} = i\sigma_2\, \phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{+*} \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^{+*} \end{pmatrix}. \tag{14.28}$$

Pole to transformuje się tak samo jak ϕ, równania (12.13), z wartością hiperładunku $Y_{Hi} = -1/2$.

Ćwiczenie 68
Udowodnić, że $\tilde{\phi}$ transformuje się tak samo jak pole ϕ pod wpływem transformacji $SU(2)_L$. Skorzystać z relacji słusznej dla dowolnego $U \in SU(2)$:

$$i\sigma_2\, U^* = U\, i\sigma_2\,, \tag{14.29}$$

którą sprawdzić można bezpośrednim rachunkiem podstawiając postać (13.31) macierzy U.

Przy pomocy dualnego pola Higgsa można skonstruować niezmienniczy lagranżjan generujący masę kwarku u

$$\mathcal{L}_m = -G_u \left(\overline{L_q}\, \tilde{\phi}\, u_R + \text{h.c.} \right). \tag{14.30}$$

W cechowaniu unitarnym otrzymamy formę taką jak dla leptonów

$$-\mathcal{L}_m = \frac{G_u}{\sqrt{2}} (v + H) \left(\overline{u_R}\, u_L + \overline{u_L}\, u_R \right) \quad \to \quad m_u \left(\overline{u_R}\, u_L + \overline{u_L}\, u_R \right), \tag{14.31}$$

gdzie $m_u = G_u v/\sqrt{2}$. Podobnie jak dla leptonów oddziaływanie pola Higgsa z kwarkami jest proporcjonalne do ich masy. Dla najcięższego z nich, kwarku top za masą $m_t \approx 175$ GeV, stała sprzężenia tego oddziaływania jest rzędu jedynki

$$\frac{G_t}{\sqrt{2}} = \frac{m_t}{v} \approx 0.7\,. \tag{14.32}$$

Ćwiczenie 69
Udowodnić niezmienniczość lagranżjanu (14.30) względem transformacji grupy elektrosłabej $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

14.4 Masy neutrin

Przeprowadzone w ostatnich latach eksperymenty neutrinowe sugerują, że neutrina posiadają niewielką (w skali eV) masę. Pojawia się zatem pytanie jak dodać do modelu standardowego masę neutrin, zachowując (spontanicznie złamaną) symetrię cechowania $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Rozwiązanie 1

Załóżmy, że masowe neutrino jest opisywane bispinorem spełniającym równanie Diraca. Istnieje więc niezależne od aktywnego neutrina, ν_L, *sterylne neutrino* o chiralności dodatniej, N_R. Pozostaje ono singletem względem transformacji cechowania z grupy $SU(2)_L$ i jak zauważyliśmy w rozdziale 12.5, nie odziaływuje z elektrosłabymi bozonami pośredniczącymi. Oddziaływuje natomiast z polem Higgsa, które nadaje masę neutrinom tak jak górnym kwarkom, poprzez lagranżjan

$$\mathcal{L}_m = -G_\nu \left(\overline{L_e}\, \tilde{\phi}\, N_R + \text{h.c.} \right). \tag{14.33}$$

W cechowaniu unitarnym

$$-\mathcal{L}_m = \frac{G_\nu}{\sqrt{2}} (v+H) \left(\overline{N_R} \nu_L + \overline{\nu_L} N_R \right) \quad \to \quad m_\nu^D \left(\overline{N_R} \nu_L + \overline{\nu_L} N_R \right), \tag{14.34}$$

gdzie $m_\nu^D = G_\nu v/\sqrt{2}$ jest *masą Diraca* neutrin. Człon masowy Diraca zachowuje cząstkową liczbę leptonową, gdyż jest niezmienniczy względem transformacji (14.47) z następnego rozdziału.

Rozwiązanie 2

Załóżmy, że zarówno aktywne neutrino lewoskrętna, ν_L, jak i sterylne neutrino prawoskrętne, N_R, są opisywanymi bispinorami Majorany, $\psi = \psi^c$. Wtedy, zgodnie ze wzorami (6.9) i (6.10), zachodzi

$$\nu = \nu_L + (\nu_L)^c, \qquad\qquad N = N_R + (N_R)^c. \tag{14.35}$$

Najogólniejszy lagranżjan masowy niezmienniczy względem właściwej, ortochronicznej tranformacji Lorentza to

$$-\mathcal{L}_m = M_3 \overline{\nu} \nu + M_1 \overline{N} N + m_D \left(\overline{N} \nu + \overline{\nu} N \right), \tag{14.36}$$

lub zapisując w postaci macierzowej

$$-\mathcal{L}_m = \left(\overline{\nu}, \overline{N} \right) \begin{pmatrix} M_3 & m_D \\ m_D & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ N \end{pmatrix}. \tag{14.37}$$

Po rozpisaniu na składowe chiralne, lagranżjan ten przyjmuje postać

$$-\mathcal{L}_m = \left(\overline{\nu_L}, \overline{(N_R)^c} \right) \begin{pmatrix} M_3 & m_D \\ m_D & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\nu_L)^c \\ N_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \tag{14.38}$$

W najbardziej popularnym mechaniźmie *huśtawki* $M_3 = 0$ oraz $m_D \ll M_1$ i po diagonalizacji macierzy mas otrzymujemy dwa neutrina o ujemnej chiralności

$$\nu_{1L} \simeq \nu_L - \frac{m_D}{M_1} (N_R)^c, \qquad\qquad \nu_{2L} \simeq (N_R)^c + \frac{m_D}{M_1} \nu_L \tag{14.39}$$

z masami, odpowiednio,

$$m_1 \simeq \frac{m_D^2}{M_1} \ll m_D, \qquad\qquad m_2 \simeq M_1. \tag{14.40}$$

Tak więc, mechanizm ten tłumaczy istnienie bardzo lekkiego neutrina porzez wprowadzenie bardzo ciężkiego sterylnego neutrina.

14.5 Generacje i mieszanie

Wielkim osiągnięciem ostatniego ćwierćwiecza XX wieku była eksperymentalna weryfikacja istnienia trzech generacji kwarków i leptonów o masach $m < v$. Ze względu na symetrię cechowania $SU(2)$, tworzą one dublety dla cząstek lewych oraz singlety dla cząstek prawych. Wprowadźmy oznaczenia, dla leptonów

$$L_e^i = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \tag{14.41}$$

$$E_R^i = (e_R, \ \mu_R, \ \tau_R), \tag{14.42}$$

oraz dla kwarków

$$L_q^i = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \tag{14.43}$$

$$U_R^i = (u_R, \ c_R, \ t_R) \tag{14.44}$$

$$D_R^i = (d_R, \ s_R, \ b_R). \tag{14.45}$$

gdzie $i = 1,2,3$ to wskaźnik zapachu.

Dla każdego z dubletu leptonowego (wraz z odpowiadającym mu singletem) istnieje ściśle zachowana cząstkowa liczba leptonowa (14.2): l_e, l_μ, l_τ. Wraz z nimi zachowana jest też całkowita liczba leptonowa

$$l = l_e + l_\mu + l_\tau\,. \tag{14.46}$$

Z twierdzenia Noether, istnienie zachowanych leptonowych liczb kwantowych jest związane z niezmienniczością lagranżjanu względem globalnych transformacji

$$L_e^i \to \mathrm{e}^{i\alpha_i} L_e^i, \qquad E_R^i \to \mathrm{e}^{i\alpha_i} E_R^i, \tag{14.47}$$

gdzie fazy α_i zależą od generacji $i = 1,2,3$. Oznacza to w szczególności, że jak dotąd nie zaobserwowano przejść między generacjami leptonowymi, na przykład prądu naładowanego $\nu_{eL} \to \mu_L$ lub prądu neutralnego $e_{L,R} \to \mu_{L,R}$.

Dla generacji kwarkowych obowiązuje zachowanie całkowitej liczby barionowej związanej z niezależną od generacji globalną symetrią cechowania

$$L_q^i \to \mathrm{e}^{i\alpha} L_q^i, \qquad U_R^i \to \mathrm{e}^{i\alpha} U_R^i, \qquad D_R^i \to \mathrm{e}^{i\alpha} D_R^i. \tag{14.48}$$

Nie istnieją natomiast cząstkowe liczby barionowe, możliwe więc są przejścia między generacjami kwarkowymi. W szczególności w rozpadach dziwnych mezonów, $K^- \to \pi^0 + e^- + \nu_e$, zaobserwowano prąd naładowany ze zmianą dziwności:

$$s_L \to u_L W^-\,. \tag{14.49}$$

Jak dotąd nie zaobserwowano natomiast procesów z prądami neutralnymi ze zmianą dziwności (zapachu): $s_{L,R} \to d_{L,R}$, na przykład w procesie rozpadu kaonu, $K^+ \to \pi^+ + e^+ + e^-$.

14.5.1 Kąt mieszania Cabibbo

W przypadku tylko **dwóch** generacji kwarkowych fakty te można opisać wprowadzając kombinację liniową dolnych kwarków d_L i s_L obróconą o kąt Cabibbo θ_C:

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d'_L = \cos\theta_C\, d_L + \sin\theta_C\, s_L \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L = -\sin\theta_C\, d_L + \cos\theta_C\, s_L \end{pmatrix}.$$

Nowe dublety używamy do konstrukcji lagranżjanu oddziaływań elektrosłabych. Tak więc, przejścia następują teraz tylko w ramach jednej generacji, *dopuszczając* jednakże prądy naładowane ze zmianą dziwności

$$u_L \;\to\; s_L W^+, \qquad\qquad c_L \;\to\; d_L W^+. \tag{14.50}$$

Jednocześnie stałe sprzężenia tych procesów zostaną zmodyfikowane o wartość sinusa lub cosinusa kąta Cabibbo. Na przykład, dla pierwszego prądu naładowanego w lagranżjanie (12.27):

$$\overline{u_L}\,\gamma^\mu\, d'_L = \cos\theta_C\,(\overline{u_L}\,\gamma^\mu\, d_L) + \sin\theta_C\,(\overline{u_L}\,\gamma^\mu\, s_L)\,. \tag{14.51}$$

Efekt ten łamie uniwersalność prądów naładowanych dla procesów leptonowych i hadronowych. Ze względu na to, że transformacja dolnych kwarków jest ortogonalna nie pojawią prądy neutralne ze zmianą dziwności, gdyż

$$\overline{d'_L}\,\gamma^\mu\, d'_L + \overline{s'_L}\,\gamma^\mu\, s'_L = \overline{d}_L\,\gamma^\mu\, d_L + \overline{s}_L\,\gamma^\mu\, s_L\,. \tag{14.52}$$

Ćwiczenie 70
Udowodnić relację (14.52).

Uogólnienie mechanizmu mieszania na trzy generacje polega na wykonaniu unitarnej transformacji V_{CKM}, mieszającej dolne kwarki:

$$\begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}. \tag{14.53}$$

Macierz V_{CKM} nazywamy *macierzą mieszania Cabibbo–Kobayashi–Maskawy*. Unitarność macierzy zapewnia brak prądów neutralnych ze zmianą zapachu, tzn. słuszna jest relacja (14.52) uzupełniona o trzeci kwark b

$$\overline{d'_L}\,\gamma^\mu\, d'_L + \overline{s'_L}\,\gamma^\mu\, s'_L + \overline{b'_L}\,\gamma^\mu\, b'_L = \overline{d}_L\,\gamma^\mu\, d_L + \overline{s}_L\,\gamma^\mu\, s_L + \overline{b}_L\,\gamma^\mu\, b_L\,. \tag{14.54}$$

14.6 Macierz mieszania CKM

Skąd bierze się mieszanie? Czy można je zrozumieć w ramach modelu standardowego? Okazuje się, że kluczem do zrozumienia jest analiza generacji członów masowych kwarków w lagranżjanie zgodnie z zasadami przedstawionymi w poprzednich rozdziałach.

Napiszmy najogólniejszy lagranżjan zbudowany z pól (14.41)–(14.45), niezmienniczy względem transformacji cechowania $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Uogólniając lagranżjan (12.13) i (12.14) dla trzech generacji, otrzymamy

$$\mathcal{L}_F = \sum_{i=1}^{3} i\left\{\overline{L_e^i}\,\not{D}^L L_e^i + \overline{L_q^i}\,\not{D}^L L_q^i + \overline{E_R^i}\,\not{D}^R E_R^i + \overline{U_R^i}\,\not{D}^R U_R^i + \overline{D_R^i}\,\not{D}^R D_R^i\right\}. \tag{14.55}$$

Do tego dodamy lagranżjan generujący masę ze sprzężeniami Yukawy, zbudowany według zasady omawianej w poprzednim rozdziale

$$\mathcal{L}_Y = -\sum_{i,j}\left\{G_e^{ij}\,(\overline{L_e^i}\,\phi\,E_R^j) + G_u^{ij}\,(\overline{L_q^i}\,\tilde{\phi}\,U_R^j) + G_d^{ij}\,(\overline{L_q^i}\,\phi\,D_R^j) + \text{h.c.}\right\}, \tag{14.56}$$

gdzie sumujemy po powtarzających się wskaźnikach $i,j = 1,2,3$. Wielkości G^{ij} są trzema *zespolonymi* macierzami stałych sprzężenia o wymiarze 3×3. Zwróćmy uwagę, że niezmienniczość cechowania wymusza sprzężenia fermionów z różnych generacji w najogólniejszej postaci larganżjanu masowego. Otrzymujemy w ten sposób niedagonalne macierze stałych sprzężenia G^{ij}.

W cechowaniu unitarnym (13.35), po spontanicznym złamaniu symetrii otrzymujemy

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{v+H}{\sqrt{2}}\left\{\overline{E_L}\,G_e\,E_R + \overline{U_L}\,G_u\,U_R + \overline{D_L}\,G_d\,D_R + \text{h.c.}\right\}, \tag{14.57}$$

gdzie zastosowaliśmy zapis macierzowy, na przykład

$$\overline{E_L}\,G_e\,E_R = \begin{pmatrix} \overline{e_L}, & \overline{\mu_L}, & \overline{\tau_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{ee} & G_{e\mu} & G_{e\tau} \\ G_{\mu e} & G_{\mu\mu} & G_{\mu\tau} \\ G_{\tau e} & G_{\tau\mu} & G_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}.$$

Udowodnimy najpierw

Twierdzenie

Dla dowolnej nieosobliwej macierzy zespolonej G istnieją macierze unitarne A i B takie, że zachodzi

$$G = A^\dagger\,\Lambda\,B\,, \tag{14.58}$$

gdzie Λ jest *diagonalną* macierzą rzeczywistą z *dodatnimi* wartościami własnymi

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \tag{14.59}$$

Macierze unitarne są określone z dokładnością do transformacji

$$A, B \to \ \text{diag}(\mathrm{e}^{i\phi_1}, \mathrm{e}^{i\phi_2}, \mathrm{e}^{i\phi_3})\,A, B\,. \tag{14.60}$$

Dowód
Rozważmy macierze hermitowską $GG^\dagger$, którą można zdiagonalizować przy pomocy unitarnej macierzy A. Jej wartości własne są rzeczywiste i dodatnie, $\lambda_i^2 > 0$,

$$GG^\dagger = A^\dagger \Lambda^2 A\,, \qquad \Lambda^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, ..., \lambda_n^2)\,. \tag{14.61}$$

Następnie zapiszemy macierz G w postaci

$$G = A^\dagger \Lambda B, \qquad B = \Lambda^{-1} A G\,, \tag{14.62}$$

gdzie $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ oraz $\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}(1/\lambda_1, 1/\lambda_2, ..., 1/\lambda_n)$ i wszystkie $\lambda_i > 0$. B jest szukaną drugą macierzą unitarną, która diagonalizuje G, gdyż

$$BB^\dagger = (\Lambda^{-1} A G)(G^\dagger A^\dagger \Lambda^{-1}) = \Lambda^{-1}\Lambda^2\Lambda^{-1} = 1\,.$$

Warunek $B^\dagger B = G^\dagger A^\dagger (\Lambda^{-1})^2 A G = 1$ można udowodnić korzystając z własności $(\Lambda^{-1})^2 = (\Lambda^2)^{-1}$, a następnie obliczając $(\Lambda^2)^{-1}$ z relacji (14.61).

Możemy więc znaleźć diagonalizujące macierze unitarne dla każdej macierzy sprzeżeń $G_{e,u,d}$ i przepisać lagranżjan (14.57) w formie

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{v+H}{\sqrt{2}}\left\{\overline{E_L}\,(A_e^\dagger \Lambda_e B_e)\, E_R + \overline{U_L}\,(A_u^\dagger \Lambda_u B_u)\, U_R + \overline{D_L}\,(A_d^\dagger \Lambda_d B_d)\, D_R + \text{h.c.}\right\}$$

gdzie macierze $\Lambda_{e,u,d}$ są diagonalne. Przedefiniowując następnie każde z pól

$$\begin{aligned} E'_L &= A_e E_L & \qquad E'_R &= B_e E_R \\ U'_L &= A_u U_L & U'_R &= B_u U_R \\ D'_L &= A_d D_L & D'_R &= B_d D_R\,, \end{aligned} \tag{14.63}$$

otrzymamy lagranżjan wyrażony przy pomocy nowych pól

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{v+H}{\sqrt{2}}\left\{\overline{E'_L}\,\Lambda_e E'_R + \overline{U'_L}\,\Lambda_u U'_R + \overline{D'_L}\,\Lambda_d D'_R + \text{h.c.}\right\}. \tag{14.64}$$

Kładąc $H = 0$ otrzymujemy lagranżjan generujący masę fermionów

$$\mathcal{L}_m = -\left\{\overline{E'_L}\, M_e E'_R + \overline{U'_L}\, M_u U'_R + \overline{D'_L}\, M_d D'_R + \text{h.c.}\right\}. \tag{14.65}$$

W każdym członie tego lagranżjanu macierz mas to

$$M = \frac{v}{\sqrt{2}}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3)\,. \tag{14.66}$$

Stąd pola primowane mają określoną masę $m_i = v\,\lambda_i/\sqrt{2}$.

Zakładając na początek *zerową masę neutrin* zauważamy, że macierz tranformacji dla pól neutrinowych jest w zasadzie dowolna. Wykorzystajmy tę swobodę i przedefiniujemy pole neutrin $\nu_L^T = (\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L})$ przy pomocy unitarnej macierzy diagonalizującej A_e ,

$$\nu'_L = A_e\, \nu_L\,, \tag{14.67}$$

tak by leptonowa część lagranżjanu (14.55) nie uległa zmianie. Rzeczywiście, dla lewoskrętnych leptonów otrzymujemy:

$$\overline{L_e}\, \not{D}^L L_e = (\overline{L_e'}\, A_e)\, \not{D}^L (A_e^\dagger L_e') = \overline{L_e'}\, \not{D}^L (A_e A_e^\dagger)\, L_e' = \overline{L_e'}\, \not{D}^L L_e',$$

gdzie skorzystaliśmy z warunku unitarności macierzy A_e. W przypadku gdy neutrina posiadają *niezerową masę*, co wydaje się już być niezaprzeczalnym faktem eksperymentalnym, pola neutrin ulegają zmieszaniu, tak jak w opisanych poniżej rozważaniach dla kwarków.

Rozważając transformacje (14.63) dla kwarków stwierdzamy, że podobnie nie ulegnie zmianie człon kinetyczny oraz człon z prądami neutralnymi w kwarkowej części lagranżjanu (14.55). Natomiast ze względu na inną macierz transformacji dla kwarków górnych i dolnych w dubletach kwarkowym zmieni się część lagranżjanu dla prądów naładowanych występujących w członie $\overline{L_q}\, \not{D}^L L_q$. Otrzymamy bowiem dla prądu naładowanego wyrażonego w nowych polach

$$\mathcal{L}^{cc} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\, (\overline{U_L}\, \gamma^\mu D_L)\, W_\mu^- = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\overline{U_L'}\, \gamma^\mu\, \underline{A_u\, (A_d)^\dagger}\, D_L' \right) W_\mu^- .$$

Podkreślona unitarna macierz

$$V_{CKM} = A_u\, (A_d)^\dagger \tag{14.68}$$

to macierz Cabibbo–Kobayashi-Maskawy (CKM) ze wzoru (14.53), w którym pola po prawej stronie to pola primowane o określonej masie, a pola po lewej stronie to nowe pola, które w tym momencie oznaczylibyśmy jako

$$D_L'' = V_{CKM}\, D_L' , \tag{14.69}$$

lub zapisując przy pomocy składowych

$$\begin{pmatrix} d_L'' \\ s_L'' \\ b_L'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L' \\ s_L' \\ b_L' \end{pmatrix} . \tag{14.70}$$

Nowe pola dolnych kwarków D_L'' diagonalizują lagranżjan oddziaływania, ale nie mają określonej masy tak jak pola primowane D_L'. Stąd multiplet kwarkowy ma teraz postać

$$\begin{pmatrix} U_L' \\ D_L'' = V_{CKM}\, D_L' \end{pmatrix}, \qquad U_R', \qquad D_R'. \tag{14.71}$$

Od tej pory zapominamy o wyjściowych polach (nieprimowanych) przy pomocy których zapisaliśmy lagranżjan fermionowy (14.55) oraz (14.56) i posługujemy się polami o określonej masie (primowanymi). W części lagranżjanu dla kwarkowych prądów naładowanych pojawi się macierz mieszania CKM.

<u>Ćwiczenie 71</u>

Udowodnić, że macierz (14.68) jest unitarna.

14.7 Liczba parametrów macierzy CKM

Rozumowanie przeprowadzimy dla macierzy unitarnej o wymiarze $n \times n$.

W rozdziale 1. pokazaliśmy, że macierze z grupy $SU(n)$ mają $n^2 - 1$ parametrów rzeczywistych. Natomiast macierze unitarne z grupy $U(n)$ mają n^2 parametrów rzeczywistych ze względu na brak warunku unormowania wyznacznika do jedynki. Pośród nich mamy $n(n-1)/2$ kątów obrotu w płaszczyznach dwuwymiarowych w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Rozważając bowiem czysto rzeczywiste macierze unitarne otrzymujemy grupę ortogonalną $O(n)$ z $n(n-1)/2$ kątami Eulera. Pozostałe $n(n+1)/2$ parametrów to niezależne fazy $\exp(i\phi)$ w zespolonych elementach macierzy unitarnej z grupy $U(n)$.

Swoboda transformacji (14.60) dla macierzy A, B pozwala zredukować liczbę niezależnych faz w macierzy CKM wykonując transformację

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_n} \end{pmatrix} V_{CKM} \begin{pmatrix} e^{-i\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_2} & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & 0 & e^{-i\beta_n} \end{pmatrix} \tag{14.72}$$

i tak dobierając fazy by wyzerować maksymalną liczbę niezależnych faz. Tym samym dokonujemy globalnej transformacji cechowania pól U' i D' (dla obu skrętności) przy pomocy macierzy czynników fazowych.

$$U_i' \;\to\; e^{i\alpha_i} U_i', \qquad\qquad D_i' \;\to\; e^{i\beta_i} D_i'. \tag{14.73}$$

W ten sposób nie jest zachowana cząstkowa liczba hadronowa w ramach jednej generacji, ze względu na różne fazy α_i i β_i w ramach tego samego dubletu.

Ile niezależnych faz wprowadza transformacja (14.72) Zapiszmy każdą z faz w postaci

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k + \alpha_i' = \alpha + \alpha_i' \\ \beta_i &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_k + \beta_i' = \beta + \beta_i'. \end{aligned} \tag{14.74}$$

Łatwo udowodnić sumując fazy α_i i β_i, że

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i' = \sum_{i=1}^{n} \beta_i' = 0\,.$$

Tak więc wśród $2n$ faz primowanych jest $2(n-1)$ niezależnych. Podstawiając parametryzację (14.74) do (14.72) otrzymamy jako wspólny czynnik $\exp i(\alpha-\beta)$ dla wszystkich elementów. Występująca tu faza $(\alpha-\beta)$ jest ostatnim niezależnym elementem. Ostatecznie transformacja (14.72) wnosi $(2n-1)$ niezależnych faz, które zredukują liczbę niezależnych faz w macierzy CKM do

$$\tfrac{1}{2}n(n+1) - (2n-1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\,. \tag{14.75}$$

Liczba generacji	Liczba niezal. kątów	Liczba niezal. faz
1	0	0
2	1	0
3	3	1
4	6	3

Tablica 14.1: Liczba paramerów macierzy CKM.

Pozostałe $n(n-1)/2$ parametry to kąty Eulera.

W tabeli 14.1 podsumowujemy liczbę parametrów macierzy V_{CKM} w zależności od liczby generacji n. Widzimy, że dla dwóch generacji otrzymujemy tylko jeden kąt Cabibbo, natomiast dla trzech generacji mamy trzy kąty i jedną fazę. W tym przypadku jedną z możliwych parametryzacji jest

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}\,\mathrm{e}^{i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}\,\mathrm{e}^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14.76}$$

co po wymnożeniu macierzy prowadzi do

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}\,c_{13} & s_{12}\,c_{13} & s_{13}\,\mathrm{e}^{i\delta} \\ -s_{12}\,c_{23} - c_{12}\,s_{23}\,s_{13}\,\mathrm{e}^{-i\delta} & c_{12}\,c_{23} - s_{12}\,s_{23}\,s_{13}\,\mathrm{e}^{-i\delta} & s_{23}\,c_{13} \\ s_{12}\,s_{23} - c_{12}\,c_{23}\,s_{13}\,\mathrm{e}^{-i\delta} & -c_{12}\,s_{23} - s_{12}\,c_{23}\,s_{13}\,\mathrm{e}^{-i\delta} & c_{23}\,c_{13} \end{pmatrix}, \tag{14.77}$$

gdzie $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ oraz $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$.

Występująca tu faza $\delta \neq 0$ prowadzi do łamania symetrii CP w oddziaływaniach słabych. Z przeprowadzonych doświadczeń wynika następująca herarichia kątów mieszania

$$1 \gg \theta_{12} \gg \theta_{23} \gg \theta_{13}\,. \tag{14.78}$$

Wynika stąd parametryzacja Wolfensteina macierzy mieszania. Kładąc $s_{12} = \lambda$ zapisujemy

$$V_{cb} \simeq s_{23} = A\lambda^2 \qquad \text{oraz} \qquad V_{ub} = s_{13}\mathrm{e}^{i\delta} \simeq A\lambda^3(\rho - i\eta)\,,$$

gdzie $A \simeq 1$ i $|\rho - i\eta| < 1$. Ostatecznie, z dokładnością do członów $O(\lambda^3)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} V_{CKM} &= \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14.79}$$

Wykorzystując warunek unitarności dla pierwszej i trzeciej kolumny

$$V_{ud}^* V_{ub} + V_{cd}^* V_{cb} + V_{td}^* V_{tb} = 0\,, \tag{14.80}$$

otrzymujemy związek między parametrami (ρ, η) poprzez tzw. trójkąt unitarności powstały po podzieleniu (14.80) przez $V_{cb}^* V_{cd}$,

$$\frac{V_{ud}^* V_{ub}}{V_{cd}^* V_{cb}} + 1 + \frac{V_{td}^* V_{tb}}{V_{cd}^* V_{cb}} = (-\rho + i\eta) + 1 + (\rho - 1 - i\eta) = 0\,. \tag{14.81}$$

W płaszczyźnie zespolonej otrzymujemy więc trójkąt o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(1,0)$ oraz (ρ, η). Istnienie trójkąta jest więc przejawem **łamania symetrii** CP poprzez różną od zera wartość parametru η. Wznaczenie tego parametru pozostaje wielkim wyzwaniem eksperymentalnym.

14.8 Podsumowanie

Podsumowaniem będzie podanie pełnej postaci lagranżjanu oddziaływań elektrosłabych w cechowaniu unitarnym (13.35):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_F\,. \tag{14.82}$$

Lagranżjan *pól cechowania* to

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^{3} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}\,. \tag{14.83}$$

Występujące tu pola należy wyrazić przy pomocy pól cechowania $W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu$, zdefiniowanych poprzez równania (12.22) i (12.29).

Lagranżjan *pola Higgsa* w cechowaniu unitarnym przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_H &= \frac{1}{2}(\partial^\mu H)(\partial_\mu H) - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, m_H H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 \\ &- \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2 \left\{ m_W^2\, W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2\, Z^\mu Z_\mu \right\}.\end{aligned} \tag{14.84}$$

Pierwsza linijka opisuje samoodziaływanie pola Higgsa, natomiast druga nadaje masę bozonom pośredniczącym $W^\pm$ i Z^0, a także opisuje ich oddziaływanie z polem Higgsa.

Lagranżjan dla *pól materii fermionowej* to

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F &= \sum_i \left\{ \overline{\psi}_i \left(i\partial\!\!\!/ - m_i - \frac{m_i}{v} H \right) \psi_i \right. \\ &- \frac{g}{\cos\theta_W} (T_i^3 - \sin^2\theta_W Q_i)\, (\overline{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i)\, Z_\mu \\ &- \left. eQ_i\, (\overline{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i)\, A_\mu \right\} \\ &- \sum_i \frac{g}{\sqrt{2}}\, \overline{L_i} \gamma^\mu (W_\mu^+ \hat{T}^- + W_\mu^- \hat{T}^+)\, L_i\end{aligned} \tag{14.85}$$

gdzie $\operatorname{tg}\theta_W = g'/g$ oraz $e = g\sin\theta_W$. Sumowanie w członach z ψ_i jest przeprowadzone po wszystkich możliwych chiralnych polach fermionowych. Na przykład, dla pierwszej generacji

$$\psi_i \in \{\nu_{eL}, e_L, e_R, u_L, u_R, d_L, d_R\}$$

Natomiast sumowanie po L_i dotyczy lewoskrętnych dubletów leptonowych i kwarkowych

$$L_i \in \left\{ \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \right\}.$$

W dubletach kwarkowych dolne kwarki są zmieszane przy pomocy macierzy CKM. Wartości składowej izospinu T_i^3 oraz ładunków elektrycznych Q_i można znaleźć w tabeli 12.5

Pierwsza linijka w lagranżjnie (14.85) to człon swobodny oraz człon opisujący oddziaływanie pól materii z polem Higgsa z siła sprzężenia proporcjonalną do masy fermionu. Druga i trzecia linijka opisuje prądy neutralne z wymianą Z^0 i prąd elektromagnetyczny, natomiast ostatnia linijka zawiera prądy naładowane z wymianą bozonów $W^{\pm}$

Lagranżjan oddziaływań elektrosłabych ze spontanicznie złamaną symetrią cechowania ma 17 niezależnych parametrów:

- 2 stałe sprzężenia g i g' (albo kąt Weinberga θ_W i ładunek e),
- 2 parametry pola Higgsa - wartość próżniową pola Higgsa v (lub masę m_H) oraz stałą sprzężenia λ,
- 9 mas fermionowch - sześciu kwarków i trzech masywnych leptonów
- 4 parametry macierzy CKM (trzy kąty oraz faza).

Po dodaniu stałej sprzężenia g_s teorii oddziaływań silnych, chromodynamiki kwantowej, otrzymujemy 18 niezależnych parametrów modelu standardowego cząstek elementarych opartego o grupę cechowania:

$$SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y\,. \tag{14.86}$$

Liczba parametrów może ulec zwiększeniu w związku z niezerową masą neutrin. Tak duża liczba parametrów powoduje, że nie można uznać modelu (14.86) za teorię podstawową. W szczególności wartości mas fermionów pozostają niewyjaśnione. Może to mieć związek z tym, że nie rozważmy oddziaływań grawitacyjnych.

Rozdział 15

Oddziaływania silne

Oddziaływania silne dotyczą tylko kwarków, gdyż leptony nie oddziaływują silnie. Na poziomie materii elementarnej oddziaływania silne nie rozróżniają zapachu kwarków. Jedynym stopniem swobody istotnym dla tych oddziaływań jest *kolor*. W następnym rozdziale przedstawimy lagranżjan oddziaływań silnych.

15.1 Lagranżjan chromodynamiki

Każde fermionowe pole kwarkowe $\psi \in \{u, d, s, c, t, b\}$ istnieje w trzech stanach

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix}. \tag{15.1}$$

Wskaźniki $i = 1, 2, 3$ nazywane są *kolorem*, gdyż bardziej obrazowo można dokonać identyfikacji kolejnych wskaźników z kolorem: czerwonym, zielonym i niebieskim. Pola kwarkowe transformują się zgodnie z reprezentacją fundamentalną *lokalnej grupy cechowania* $SU(3)$:

$$\psi'(x) = U(x)\,\psi(x)\,, \qquad\qquad U(x) \in SU(3)\,. \tag{15.2}$$

Lagranżjan niezmienniczy względem powyższej transformacji cechowania ma znaną już formę (11.53):

$$\mathcal{L}_{QCD} = i\,\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\Big(\partial_{\mu} + i g_s A^a_{\mu}\,\hat{T}^a\Big)\,\psi - \tfrac{1}{4}\,F^a_{\mu\nu}\,F^{a\mu\nu}\,. \tag{15.3}$$

gdzie g_s jest stałą sprzężenia oddziaływań silnych. Lagranżjan ten jest również niezmienniczy względem odbić P i C. Stąd obie składowe chiralne pól kwarkowych, ψ_L i ψ_R, oddziaływują silnie w taki sam sposób. Ponadto założyliśmy, że kwarki są bezmasowe. Teoria kwantowa wynikająca z lagranżjanu (15.3) nazywa się *chromodynamiką kwantową* (QCD).

W lagranżjanie (15.3) sumujemy po powtarzającym się wskaźniku kolorowym, $a = 1, 2, \ldots, 8$. *Osiem* pól cechowania A^a_{μ}, będących nośnikiem oddziaływań silnych, nazywa się *gluonami*. Ich liczba jest związana z liczbą generatorów $\hat{T}^a$ grupy $SU(3)$. Tradycyjnie używa się reprezentacji Gell-Manna dla generatorów

$$\hat{T}^a = \tfrac{1}{2}\lambda^a\,, \tag{15.4}$$

gdzie

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{15.5}$$

Każdy z generatorów jest macierzą hermitowską i bezśladową,

$$(\hat{T}^a)^\dagger = \hat{T}^a\,, \qquad \mathrm{Tr}\,\hat{T}^a = 0\,, \tag{15.6}$$

ponadto

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{T}^a\hat{T}^b) = \tfrac{1}{2}\delta^{ab}\,. \tag{15.7}$$

Generatory tworzą algebrę Liego zadaną przez relacje komutacji

$$[\hat{T}^a, \hat{T}^b] = i f^{abc}\hat{T}^c\,, \tag{15.8}$$

gdzie stałe struktury grupy f^{abc} są kompletnie antysymetryczne ze względu na permutacje wskaźników. Różne od zera składowe to

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1 \\ f^{147} &= f^{246} = f^{257} = f^{345} = \tfrac{1}{2} \\ f^{156} &= f^{367} = -\tfrac{1}{2} \\ f^{458} &= f^{678} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned} \tag{15.9}$$

15.2 Ładunki kolorowe kwarków

Spośród generatorów (15.4) istnieją dokładnie dwa generator, $\hat{T}^3$ i $\hat{T}^8$, które ze sobą komutują. Zinterpretujemy je jako operatory ładunków kolorowych jakie niosą kwarki, odpowiednio, $\hat{Q}^3_{\mathrm{F}}$ dla ładunku izotopowego oraz $\hat{Q}^8_{\mathrm{F}}$ dla hiperładunku,

$$\hat{Q}^3_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{Q}^8_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{15.10}$$

Wyrazy diagonalne to ładunki kolorowe kwarków o określonym kolorze. Ujmując to bardziej precyzyjnie, ładunki kolorowe to wartości własne operatorów ładunku,

$$\hat{Q}^3_{\mathrm{F}}\,\mathbf{q}_i = \epsilon^3_i\,\mathbf{q}_i\,, \qquad \hat{Q}^8_{\mathrm{F}}\,\mathbf{q}_i = \epsilon^8_i\,\mathbf{q}_i\,. \tag{15.11}$$

gdzie wektory własne to

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15.12}$$

W bazie tej pole kwarkowe (15.1) można zapisać w formie

$$\psi(x) = \psi_1(x)\,\mathbf{q}_1 + \psi_2(x)\,\mathbf{q}_2 + \psi_3(x)\,\mathbf{q}_3\,. \tag{15.13}$$

Wektory (15.12) rozpinają przestrzeń liniową reprezentacji fundamentalnej grupy koloru $SU(3)$.

Podsumowując, otrzymujemy następujące wektory ładunków $\epsilon_i = (\epsilon^3_i, \epsilon^8_i)$ dla kwarków o kolorze $i \in \{1,2,3\} = \{c,z,n\}$:

$$\epsilon_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \qquad \epsilon_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \qquad \epsilon_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \tag{15.14}$$

15.3 Ładunki kolorowe gluonów

Gluony niosą analogiczne ładunki kolorowe. Inne są tylko operatory ładunków, gdyż pola gluonowe istnieją w innej przestrzeni. Są one elementami algebry Liego, będącą *ośmiowymiarową* przestrzenią reprezentacji dołączonej grupy $SU(3)$. Pola kwarkowe natomiast tworzą *trójwymiarową* przestrzeń reprezentacji fundamentalnej (porównaj dyskusję reprezentacji grupy $SU(2)$ w rozdziale 10.1.1).

Odpowiednie operatory ładunków dla gluonów to

$$\hat{Q}^3_{\mathrm{A}} = \mathrm{Ad}\,\hat{T}^3 \equiv [\hat{T}^3, \cdot\,] \qquad \hat{Q}^8_{\mathrm{A}} = \mathrm{Ad}\,\hat{T}^8 \equiv [\hat{T}^8, \cdot\,]\,. \tag{15.15}$$

Są to operatory liniowe, niewyprowadzające poza algebrę Liego ze względu na warunek komutacji (15.8). Ogólnie można pokazać, że odwzorowanie

$$\hat{T}^a \to \mathrm{Ad}\,\hat{T}^a \tag{15.16}$$

jest reprezentacją algebry Liego $SU(3)$, gdyż zachowana jest relacja komutacji (15.8) dla nowych operatorów

$$[\,\mathrm{Ad}\,\hat{T}^a, \mathrm{Ad}\,\hat{T}^b\,] = \mathrm{Ad}\,[\,\hat{T}^a, \hat{T}^b\,] = i f^{abc}\,\mathrm{Ad}\,\hat{T}^c \tag{15.17}$$

Ćwiczenie 71

Udowodnić relacje (15.17). W dowodzie wykorzystać tożsamość Jacobiego

$$[\,[\,\hat{T}^a, \hat{T}^b\,], \hat{T}^c\,] + [\,[\,\hat{T}^b, \hat{T}^c\,], \hat{T}^a\,] + [\,[\,\hat{T}^c, \hat{T}^a\,], \hat{T}^b\,] = 0\,.$$

Aby znaleźć wartości ładunków kolorowych dla gluonów zmienimy bazę generatorów $\hat{T}^a$ na nową, która rozwiązuje równania własne dla operatorów (15.15). Nową bazę tworzą dwa generatory odpowiadające zerowym ładunkom

$$\tau_3 = \hat{T}^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_8 = \hat{T}^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{15.18}$$

oraz sześć generatorów odpowiadających niezerowym ładunkom kolorowym

$$\begin{aligned}
\tau_{12} &= \frac{\hat{T}^1 + i\hat{T}^2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \tau_{21} = \tau_{12}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\tau_{13} &= \frac{\hat{T}^4 + i\hat{T}^5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \tau_{31} = \tau_{13}^{\dagger}, = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\tau_{23} &= \frac{\hat{T}^6 + i\hat{T}^7}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \tau_{32} = \tau_{23}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{15.19}$$

Bezpośredni rachunek prowadzi bowiem do następujących relacji

$$[\hat{T}^3, \tau_{ij}] = \eta_{ij}^{(3)}\, \tau_{ij}\,, \qquad [\hat{T}^8, \tau_{ij}] = \eta_{ij}^{(8)}\, \tau_{ij}\,, \tag{15.20}$$

gdzie wektor ładunków $\eta_{ij} = (\eta_{ij}^{(3)}, \eta_{ij}^{(8)})$ ma postać

$$\eta_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j\,. \tag{15.21}$$

Tak więc ładunki kolorowe gluonów są różnicą ładunków kwarków (15.14):

$$\begin{aligned}
\eta_{12} &= (1, 0) & \eta_{21} &= -\eta_{12} \\
\eta_{13} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) & \eta_{31} &= -\eta_{13} \\
\eta_{23} &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) & \eta_{32} &= -\eta_{23}\,.
\end{aligned} \tag{15.22}$$

Ćwiczenie 72

Wyprowadzić relacje (15.20) – (15.22).

Jak wyglądają nowe pola gluonowe niosące powyższe ładunki kolorowe? Macierz pól cechowania zapisana w bazie generatorów (15.4) to

$$\hat{A} = A^a \hat{T}^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^3 + A^8/\sqrt{3} & A^1 - iA^2 & A^4 - iA^5 \\ A^1 + iA^2 & -A^3 + A^8/\sqrt{3} & A^6 - iA^7 \\ A^4 + iA^5 & A^6 + iA^7 & -2A^8/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G^{11} & G^{12} & G^{13} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} \end{pmatrix}. \tag{15.23}$$

Nowe pola gluonowe G^{ij}, będące kombinacjami liniowymi wyjsciowych pól A^a, to pola o określonych ładunkach kolorowych. Biorąc bowiem pod uwagę postać (15.22) generatorów możemy zapisać pole cechowania $\hat{A}$ w nowej bazie

$$\hat{A} = A^3 \tau_3 + A^8 \tau_8 + \left\{ G^{12} \tau_{12} + G^{13} \tau_{13} + G^{23} \tau_{23} \right\} + \left\{ G^{21} \tau_{21} + G^{31} \tau_{31} + G^{32} \tau_{32} \right\} \tag{15.24}$$

Pola A^3 i A^8 (lub diagonalne pola G^{ii}) to pola neutralne kolorowo, natomiast pola niediagonalne G^{ij} to pola niosące ładunki kolorowe. Na podstawie relacji (15.20) zachodzi bowiem dla pól $\hat{G}^{ij} = G^{ij} \tau_{ij}$

$$\hat{Q}^3_{\mathrm{A}} \hat{G}^{ij} = [\hat{T}^3, \hat{G}^{ij}] = \eta^{(3)}_{ij} \hat{G}^{ij},$$

$$\hat{Q}^8_{\mathrm{A}} \hat{G}^{ij} = [\hat{T}^8, \hat{G}^{ij}] = \eta^{(8)}_{ij} \hat{G}^{ij}. \tag{15.25}$$

Zapiszmy na koniec lagranżjan oddziaływania kwarków z polami cechowania wynikający z lagranżjanu (15.3),

$$\mathcal{L}^{int} = -g_s \, \overline{q} \gamma^\mu \hat{A}_\mu q, \tag{15.26}$$

przy pomocy nowych pól. Podstawiając postać (15.23) otrzymujemy:

$$\mathcal{L}^{int} = -\frac{g_s}{\sqrt{2}} (\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{q_3}) \begin{pmatrix} \not{G}^{11} & \not{G}^{12} & \not{G}^{13} \\ \not{G}^{21} & \not{G}^{22} & \not{G}^{23} \\ \not{G}^{31} & \not{G}^{32} & \not{G}^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \tag{15.27}$$

gdzie $\not{G}^{ij} = \gamma^\mu G^{ij}_\mu$. Spośród trzech pól diagonalnych tylko tylko dwa z nich są niezależne, gdyż ze względu na bezśladowość macierzy $\hat{A}$ zachodzi

$$\not{G}^{11} + \not{G}^{22} + \not{G}^{33} = 0.$$

Wykonując mnożenia macierzowe w (15.27) znajdujemy ostateczną postać lagranżjanu oddziaływania kwarków z gluonami

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{int} = & -\frac{g_s}{\sqrt{2}}\sum_{i<j}\left\{\overline{q}_i \not{G}^{ij}\, q_j + \overline{q}_j \not{G}^{ji}\, q_i\right\} \\ & -\frac{g_s}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\overline{q_1}\gamma^\mu q_1 - \overline{q_2}\gamma^\mu q_2}{\sqrt{2}}\, A^3_\mu + \frac{\overline{q_1}\gamma^\mu q_1 + \overline{q_2}\gamma^\mu q_2 - 2\,\overline{q_3}\gamma^\mu q_3}{\sqrt{6}}\, A^8_\mu\right\}.\end{aligned} \tag{15.28}$$

Pierwsza linijka opisuje oddziaływania z wymianą ładunków kolorowych spełniających prawo zachowania (15.21), natomiast druga linijka opisuje oddziaływania bez wymiany ładunków.

Ćwiczenie 73
Pokazać, że z lagranżjanu (15.27) wynika forma (15.28).

Powyższa konstrukcja nie jest niezmiennicza względem transformacji cechowania, gdyż przekształcenie (15.2) miesza składowe o różnych ładunkach kolorowych. Podobnie działa transformacja cechowania pól gluonowych. Ustalając cechowanie można jednak wydobyć treść fizyczną zapisując lagranżjan oddziaływania w formie (15.28).